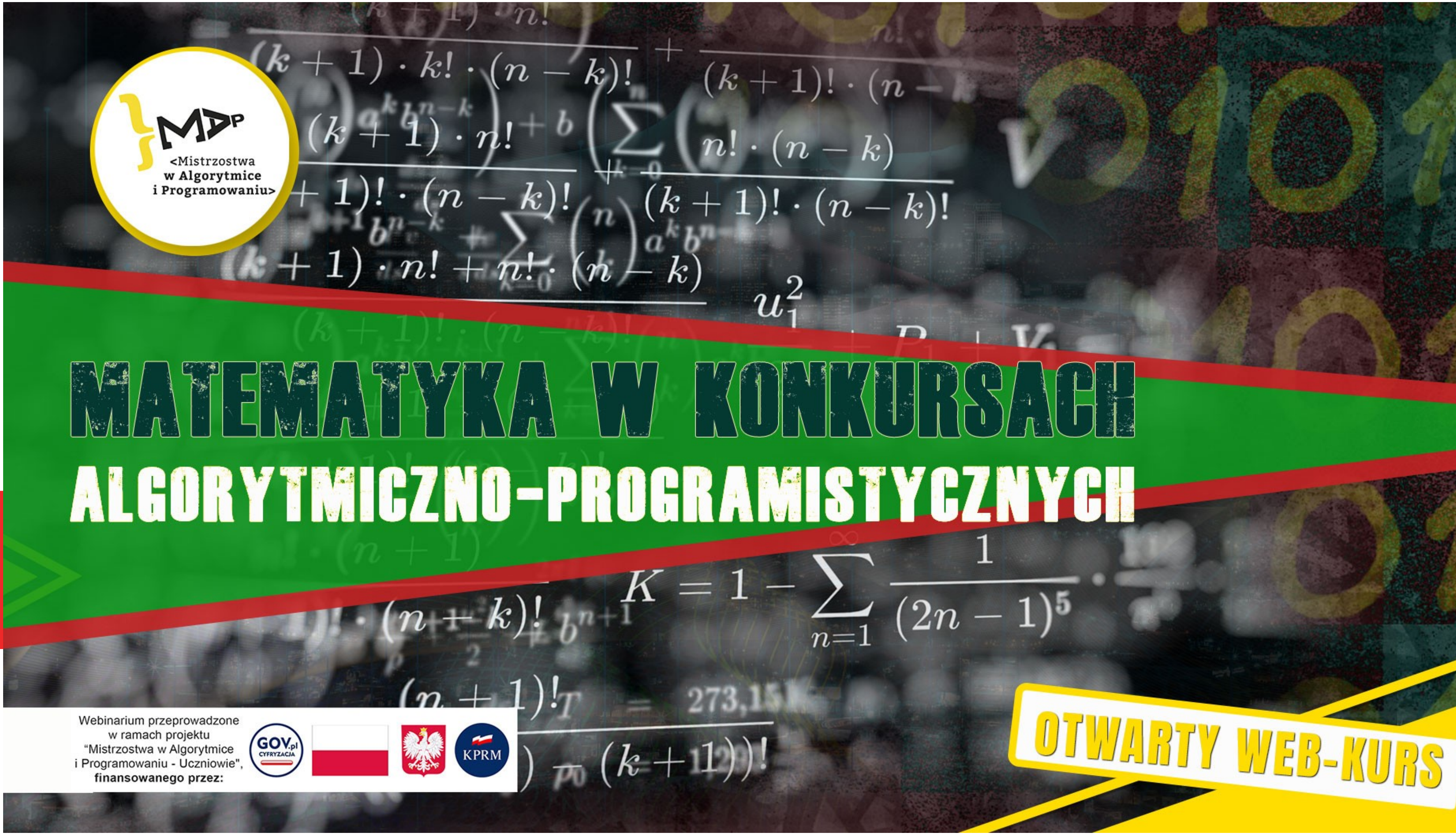
<Mistrzostwa w Algorytmice i Programowaniu>
MATEMATYKA W KONKURSACH
ALGORYTMICZNO-PROGRAMISTYCZNYCH
Webinarium przeprowadzone w ramach projektu "Mistrzostwa w Algorytmice i Programowaniu - Uczniowie", finansowanego przez:
GOV.pl CYFRYZACJA
KPRM
OTWARTY WEB-KURS

Piotr Chrząstowski-Wachtel

Logika (2)

O paradoksach, logice programów i wielu innych fascynujących rzeczach

Definiowanie pojęć

- Często używamy formalizmu logicznego, aby zdefiniować pewne pojęcia, np.

Jeżeli oznaczymy przez L(s) zdanie, że student s zdał egzamin z logiki, to za pomocą następującej notacji:

$$\{ s: L(s) \}$$

oznaczamy zbiór wszystkich studentów, którzy zdali egzamin z logiki. Ogólnie przez $\{x: p(x)\}$ rozumiemy zbiór obiektów x, które spełniają warunek p(x).

Paradoksy

Ta konwencja niesie za sobą pewne niebezpieczeństwo i możliwość uzyskania błędnej definicji.

Problem ten został zauważony przez Bertranda Russella na początku XX wieku.

Niebezpieczeństwo czyha, gdy definiując obiekty używamy ich własności (często w ukryty sposób).

Przykład paradoksu

Pewien dość despotyczny król niewielkiego państwa, w którym wszyscy mężczyźni musieli być ogoleni i w którym działał tylko jeden golibroda, wydał edykt następującej treści:

Pod karą śmierci rozkazuję, aby brody u golibrody golili wszyscy ci i tylko ci mężczyźni, którzy sami się nie golą.

Co ma robić biedny golibroda? Czy ma się sam golić, czy nie?

Paradoks Epimenidesa (kłamcy)

Wszyscy Kreteńczycy są kłamcami

"Paradoks" Epimenidesa

Wszyscy Kreteńczycy są kłamcami

W rzeczywistości paradoksem nie jest.

Jeśli bowiem prawdą jest, że nie wszyscy Kreteńczycy są kłamcami, to wszystko jest OK

Paradoks Epimenidesa w poprawniejszej formie

Kłamię

...a w najlepszej postaci, badanej m.in. przez Eubulidesa

To zdanie jest fałszywe

Inna wersja paradoksu kłamcy: na następnych 2 slajdach

Slajd pierwszy

Na następnym slajdzie jest zdanie fałszywe

Slajd drugi

Na poprzednim slajdzie jest zdanie prawdziwe

Poważny problem

Zauważmy, że mogliśmy nie zauważyć kłopotu

Wystarczy, że przerwiemy rozumowanie

po dostrzeżeniu pierwszej sprzeczności

i stwierdzimy, że pierwsze zdanie jest

fałszywe.

Problem z "oczywistym" prawem wyłączonego środka

Prawo wyłączonego środka

$$p \vee \sim p$$

Prawo wyłączonego środka nie zawsze działa!

Okazuje się, że może się zdarzyć, że ani zdanie p nie będzie prawdziwe, ani zdanie ~p nie będzie prawdziwe.

To oznacza, że dowody niewprost mają oczywistą lukę. Działają tylko przy założeniu, że prawo wyłączonego środka jest spełnione dla dowodzonego twierdzenia.

Przymiotniki autodeskryptywne,

czyli takie, które m.in. same siebie poprawnie opisują, np. polski, sześciosylabowy, osiemnastoliterowy, zagadkowy.

Jest ich niewiele.

Pozostałe to egzodeskryptywne, czyli opisujące cechy innych pojęć.

Przymiotniki auto- i egzodeskryptywne.

zielony, czujny,

śliski, nieznośny

brudny, wesoły, porządny,...

egzodeskryptywne

sześciosylabowy,

polski,

zagadkowy, ...

autodeskryptywne

Do której grupy należą przymiotnik "egzodeskryptywny"?

NIE!

zielony, czujny,

śliski, nieznośny

brudny, wesoły, porządny,

egzodeskrytpywny....

egzodeskryptywne

sześciosylabowy,

polski,

zagadkowy, autodeskryptywny ...

autodeskryptywne

Do której grupy należą przymiotnik "egzodeskryptywny"?

zielony, czujny,

śliski, nieznośny

brudny, wesoły, porządny,....

egzodeskryptywne

sześciosylabowy,

polski,

zagadkowy, autodeskryptywny

egzodeskrytpywny ...

autodeskryptywne

NIE!

Liczby interesujące

Jest wiele liczb interesujących; w pewien sposób mających jakąś ciekawą własność. Na przykład

0 jest jedyną liczbą która pomnożona przez każdą inną daje wynik równy sobie

1 jest jedyną liczbą, która przy mnożeniu daje wynik taki, jak drugi argument

2 jest najmniejszą liczbą pierwszą

3 jest najmniejszą nieparzystą liczbą pierwszą

4 jest najmniejszą liczbą złożoną,.... itd

Liczby interesujące

Liczb naturalnych jest nieskończenie wiele. Nie mogą być wszystkie interesujące, zatem istnieje najmniejsza liczba nieinteresująca, nie należąca do zbioru liczb interesujących..

Liczby interesujące

Liczb naturalnych jest nieskończenie wiele. Nie mogą być wszystkie interesujące, zatem istnieje najmniejsza liczba nieinteresująca, nie należąca do zbioru liczb interesujących.

Ale ona z tego powodu jest bardzo interesująca!

Liczby definiowalne

Liczby definiujemy na różne sposoby, na przykład liczbę 3 można zdefiniować, jako

trzy

dwa plus jeden

najmniejsza nieparzysta liczba pierwsza

...

i wiele, wiele innych

Liczby definiowalne

Pewne kombinacje słów nie definiują żadnej liczby, na przykład

Dziś świeci słońce

akuku

liczba, której kwadrat jest mniejszy od 5.

Liczby definiowalne

Rozważmy wszystkie zdania, które jednoznacznie definiują jakąś liczbę oraz utwórzmy zbiór tych liczb, które się da zdefiniować za pomocą co najwyżej tysiąca słów.

Takich liczb jest skończenie wiele.

Zatem istnieje w tym zbiorze liczba największa.

Zdefiniujmy liczbę o jeden większą od niej.

Liczby definiowalne

Zdefiniowanie tej liczby zajęło nam mniej niż 1000 słów. Więc ona w tym zbiorze się powinna znaleźć! A jej tam nie ma. :(

Spór Protagorasa z Euathlosem

Protagoras uczył Euathlosa prawa. Umówili się, że Euathlos zapłaci mu za naukę, gdy wygra pierwszy proces. Po skończonej nauce Euathlos zmienił plany życiowe i został politykiem, nie zamierzając praktykować w zawodzie prawnika. Gdy Protagoras zażądał zapłaty, Euathlos odmówił, powołując się na umowę.

Protagoras wytoczył mu proces…

Argument Protagorasa

Jeśli sąd orzeknie, że mam rację i Euathlos powinien zapłacić, to przyjmuję ten werdykt.

Jeśli jednak Euathlos wygra proces i sąd orzeknie inaczej, to będzie to jego pierwszy wygrany proces, więc mi powinien zapłacić, zgodnie z umową.

Argument Euathlosa

Jeśli sąd orzeknie, że mam rację to nie muszę płacić.

Jeśli jednak przegram proces, to zgodnie z umową nadal nie będę miał procesu wygranego, więc też niczego nie muszę płacić. Widocznie nie zostałem odpowiednio dobrze nauczony, jak wygrywać procesy.

Co ważniejsze?

Wydaje się na pierwszy rzut oka, że rozstrzygnięcie zależy od zdecydowania, co ważniejsze: wyrok sądu czy umowa?

Okazuje się jednak, że obaj stosowali identyczny schemat:

Jeżeli wyrok sądu będzie dla mnie korzystny to będę go respektował, w przeciwnym wypadku odwołam się do umowy.

Paradoks omnipotencji

Bóg jest wszechmocny, zatem:

Czy Bóg może stworzyć kamień którego nie będzie mógł podnieść? .

Czy Bóg może ograniczyć lub zniszczyć swoją wszechmoc?

Paradoksy w psychologii

Czy można badać mózg za pomocą mózgu? Czy mózg sam siebie może dobrze opisać?

Czy i w jakim stopniu terapeuta może prowadzić terapię wchodząc w interakcję z pacjentem, angażując się emocjonalnie?

Przyczyna powstawania paradoksów

Najczęstszą przyczyną jest pomieszanie pojęć metajęzyka z językiem. Definiujemy coś, co dotyczy samego procesu definiowania.

Zanim do końca określimy, o co nam chodzi, już definiowane pojęcie ingeruje w samą definicję.

Ingerencja ta może zawierać sprzeczność.

Jak unikać paradoksów?

Musimy uważać, żeby w naszych wypowiedziach nie było wartościowania i odwoływania się do treści samej wypowiedzi - to jest w zasadzie jedyne niebezpieczeństwo.

Największe twierdzenie matematyki

Wielu matematyków uważa, że największym twierdzeniem matematyki jest twierdzenie Goedla o niepełności.

O co chodzi?

Podejście matematyczne

W całej matematyce stosuje się następujące podejście:

1. Ustala się zbiór prawd podstawowych (aksjomatów) – jest to podstawa teorii, którą tworzymy.

2. Ustala się zbiór reguł dowodzenia

3. Aksjomaty teorii rozszerzamy o twierdzenia – zdania, które wynikają z aksjomatów i udowodnionych już zdań, które należą do teorii.

Podejście aksjomatyczne

Tak robił np. Euklides opierając całą geometrię na zestawie pięciu aksjomatów. Oto one:

1. Dowolne dwa punkty można połączyć odcinkiem.
2. Dowolny odcinek można przedłużyć nieograniczenie (uzyskując prostą).
3. Dla danego odcinka można zaznaczyć okrąg o środku w jednym z jego końcowych punktów i promieniu równym jego długości.
4. Wszystkie kąty proste są przystające.
5. Dwie proste, które przecinają trzecią w taki sposób, że suma kątów wewnętrznych po jednej stronie jest mniejsza od dwóch kątów prostych, przetną się z tej właśnie strony.

Podejście aksjomatyczne

Wszystkie twierdzenia Euklides wyprowadził z tych 5 aksjomatów.

Czego wymagamy od aksjomatów?

1. Żeby ich było skończenie wiele (skończoność),
2. Żeby nie były sprzeczne (niesprzeczność),
3. Żeby były wystarczające do udowodnienia każdego twierdzenia o dziedzinie, która nas interesuje (pełność).

Piąty aksjomat

Było wiele prób udowodnienia piątego aksjomatu z czterech pozostałych. Z niego wynika bezpośrednio takie twierdzenie:

Przez punkt nieleżący na prostej można poprowadzić dokładnie jedną prostą równoległą.

Nie udało się!

Okazało się, że jest on niezależny od pozostałych czterech: rozszerza teorię w istotny sposób.

Piąty aksjomat

Było wiele prób udowodnienia piątego aksjomatu z czterech pozostałych. Z niego wynika bezpośrednio takie twierdzenie:

Przez punkt nieleżący na prostej można poprowadzić dokładnie jedną prostą równoległą.

Nie udało się!

Okazało się, że jest on niezależny od pozostałych czterech: rozszerza teorię w istotny sposób.

Czy aksjomaty Euklidesa są wystarczające?

1. Jest ich skończenie wiele (5)
2. Są niesprzeczne
3. … ale nie są pełne!

Czyli istnieją twierdzenia geometrii, których nie można udowodnić za ich pomocą.

Przykład

Twierdzenie:

Jeśli prosta przecina bok trójkąta, to przecina jeszcze jeden jego bok.

Tego twierdzenia – jakże intuicyjnego! – nie da się udowodnić w ramach 5 aksjomatów Euklidesa. Nie da się udowodnić też jego zaprzeczenia. Jest to niezależne zdanie, które można przyjąć lub odrzucić uzyskując dwie różne niesprzeczne teorie.

Przykład

Aksjomat Pascha

Jeśli prosta przecina bok trójkąta, to przecina jeszcze jeden jego bok.

Czy to już wszystko, czego potrzeba? (5 aksjomatów Euklidesa plus aksjomat Pascha)

NIE!

Okazuje się, że są twierdzenia, których nadal nie jesteśmy w stanie udowodnić, np.

- Twierdzenie Pascala

- Twierdzenie Desarguesa

i wiele innych

Dawid Hilbert

Z aksjomatyzacją geometrii poradził sobie dopiero na przełomie XIX i XX w. wybitny matematyk niemiecki, Dawid Hilbert, który zaproponował zestaw 21 aksjomatów, które są niesprzeczne i pełne.

Od tej pory geometrzy używają tych aksjomatów, jako podstawy geometrii.

Program Hilberta

Hilbert postawił sobie ambitne zadanie:

Program Hilberta

Hilbert postawił sobie ambitne zadanie:

Zaksjomatyzować całą matematykę

Aksjomatyzacja arytmetyki

Zacznijmy od czegoś prostego:

Zaksjomatyzować arytmetykę

Aksjomaty Peana

1. Zero to liczba naturalna.

2. Każda liczba naturalna ma następnik w liczbach naturalnych.

3. Zero nie jest następnikiem żadnej liczby naturalnej.

4. Jeśli następnik dwóch liczb naturalnych jest taki sam, to dwie oryginalne liczby są takie same.

5. Jeśli zbiór zawiera zero, a następnik każdej liczby znajduje się w zbiorze, to zbiór zawiera liczby naturalne.

Aksjomaty Peana

Niestety, choć aksjomaty Peana są niesprzeczne i pełne, to jest ich w rzeczywistości nieskończenie wiele (aksjomat indukcji).

Hilbert przez ponad 30 lat usilnie szukał niesprzecznego i pełnego zbioru aksjomatów i mu się nie udało

Twierdzenie Goedla

Nie istnieje skończony, niesprzeczny i pełny układ aksjomatów dla liczb naturalnych.

Twierdzenie Turinga

Problem stopu jest nierozstrzygalny.

Dowód również korzystał z zasady zapętlenia pojęciowego: program, który miałby rozstrzygać, czy dany program zatrzyma się dla konkretnych danych musiałby o sobie też umieć to rozstrzygnąć.

Formuły zdaniowe

Formuła zdaniowa, to wyrażenie, w skład którego wchodzą zmienne zdaniowe i spójniki logiczne.

Przykładowo:

$$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \rightarrow r)$$

może przyjąć wartość prawda lub fałsz, w zależności od wartościowania zmiennych (wolnych).

Formuły spełnialne

- Ważną rolę odgrywają formuły spełnialne: opisują one sytuacje, które mogą zaistnieć. Formuła jest spełnialna, jeśli istnieje takie wartościowanie zmiennych, że formuła staje się prawdziwa.
- $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \rightarrow r)$ jest spełnialna, np. dla wartościowania p=1, q=0, r=1.
- A co z $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \wedge q \vee r) \wedge (r \rightarrow \neg p)$?

Co wyrażają formuły spełnialne?

- Modelując systemy często obawiamy się, że będą posiadały niepożądane własności. (np. dwie rezerwacje na jedno miejsce w systemie rezerwacji lotów). Jeśli uda się nam wyrazić taką sytuację za pomocą formuły rachunku zdań, to pytanie o jej spełnialność jest pytaniem o możliwość zaistnienia takiego zbiegu okoliczności, którego się obawiamy.

Jak badać spełnialność?

- Oczywiście można za pomocą matryc logicznych. Ale co zrobić, jeśli zmiennych jest np. 100?
- Powodzenia!   :)
- W praktycznych zastosowaniach liczba zmiennych w formułach zdaniowych bywa znacznie większa (nawet rzędu miliona!)

Największy nierozwiązany problem logiczny

- To jest właśnie problem, czy da się stwierdzić spełnialność dowolnej formuły istotnie szybciej, niż za pomocą matrycy logicznej.
- Niektórzy uważają ten problem za w ogóle największy otwarty problem matematyczny. Została ufundowana nagroda za jego rozwiązanie: 1 milion dolarów. Serio!
- Jest to słynny problem P=NP?

Logiki nieklasyczne

- Okazuje się, że klasyczna logika w wielu wypadkach jest zbyt słaba.
- Brakuje:
  - kwantyfikowania po zbiorach (logika drugiego rzędu)
  - co najmniej jeszcze jednej wartości logicznej (np. oznaczającej niepewność)
  - dynamiki – uchwycenia efektów zmian zachodzących w czasie (logiki modalne).

Weryfikacja w modelu (model checking)

- Często badamy złożone systemy, które ewoluują w czasie. Liczba stanów rośnie bardzo szybko (zazwyczaj wykładniczo).
- Logika daje narzędzia analizy tych dynamicznie zmieniających się światów.
- Często aby wykluczyć jakąś „chorą” sytuację kodujemy ją w postaci formuły logicznej i pytamy o jej spełnialność. Mamy nadzieję usłyszeć odpowiedź „NIE”.

Wnioskowanie

- Tylko osoby z tytułem profesora, mające co najmniej 35 lat oraz te, które zajmowały kierownicze stanowisko przez co najmniej 5 lat mogą kandydować na rektora uniwersytetu.
- Jan Kowalski urodził się w 1964 r.
- Tytuł profesora uzyskał w 2005 roku
- Pełnił funkcję dziekana wydziału bez przerwy od 2000 do 2010 roku
- Funkcja dziekana wydziału jest kierowniczym stanowiskiem
- Wniosek: Jan Kowalski może kandydować na rektora uniwersytetu

Logika w programach komputerowych

- W programach bardzo często manipulujemy wartościami logicznymi, które sterują wykonaniem programu
- Biegłość w przekształceniach bardzo się przydaje.

Jak pokazać, że program wykonuje to, czego się po nim spodziewamy?

Używamy w tym celu specyficznej logiki – logiki programów

W tej logice fragmenty programów są elementami formuł logicznych

Logika Hoare'a

- Formuły są typu
- {α}P{β}, gdzie α i β są formułami klasycznymi, opisującymi stan zmiennych przed wykonaniem i po wykonaniu programu P.
- Czytamy tę formułę następująco:

$\{\alpha\}P\{\beta\}$

- Jeśli program P zacznie się wykonywać w momencie, w którym zmienne spełniają warunek α i jeśli zakończy swoje działanie, to w stanie końcowym jego zmienne będą spełniać warunek β.
- Mówimy wtedy, że program P jest częściowo poprawny względem α i β

Reguły wnioskowania

Reguły wnioskowania określają, na podstawie jakich przesłanek można wyciągać jakie wnioski.

Zapisujemy je w postaci „ułamka”

$$\frac{\text{Przesłanki oddzielone przecinkami}}{\text{Wniosek}}$$

Instrukcja pusta

Dla instrukcji pustej reguła jest prosta: jeśli w stanie początkowym wiemy, że formuła α jest prawdziwa, to po wykonaniu tej instrukcji też będzie prawdziwa.

$$\frac{}{\{\alpha\}\ \varepsilon\ \{\alpha\}}$$

Instrukcja przypisania

Do sformułowania reguły dla instrukcji przypisania umówmy się, że przez jeśli $\alpha(z)$ jest formułą jednej zmiennej z, to przez $\alpha(E)$ będziemy rozumieli formułę, w której wszystkie wystąpienia zmiennej z zastąpiono przez E.

$$\frac{}{\{\alpha(E)\}\ z=E;\ \{\alpha(z)\}}$$

Instrukcja złożona

Przy instrukcji złożonej zakładamy istnienie skończonej liczby stanów pośrednich między kolejnymi wykonaniami instrukcji składowych

$$\frac{\alpha=\alpha_0, \{\alpha_0\} P_1 \{\alpha_1\}, \ldots, \{\alpha_{n-1}\} P_n \{\alpha_n\}, \alpha_n=\beta}{\{\alpha\}\ \{\ P_1; \ldots; P_n\ \}\ \{\beta\}}$$

Instrukcja warunkowa

$$\frac{\{\alpha \wedge B\}P\{\beta\}, (\alpha \wedge \sim B) \rightarrow \beta}{\{\alpha\}\text{if }(B)\ P\{\beta\}}$$

$$\frac{\{\alpha \wedge B\}P_1\{\beta\},\ \ \{\alpha \wedge \sim B\}P_2\{\beta\}}{\{\alpha\}\text{if }(B)\ P_1\ \text{else}\ P_2\{\beta\}}$$

Instrukcja pętli

W regule wnioskowania dla instrukcji pętli pojawi się tajemnicze N – jest to niezmiennik pętli, czyli formuła zawsze prawdziwa na początku każdego obrotu pętli. Czym ona jest konkretnie – nie wiadomo z góry, musimy ją zgadnąć.

$$\frac{\alpha \to N,\ \ \{N \wedge B\}P\{N\},\ N \wedge {\sim}B \to \beta}{\{\alpha\}\text{while } (B)\ \ P\{\beta\}}$$

Poprawność pętli - indukcja

W rzeczywistości poprawność pętli dowodzimy indukcyjnie.

Warunek $\alpha \to N$ oznacza, że na samym początku pętli N jest prawdziwe.

Warunek $\{N \wedge B\}P\{N\}$ oznacza, że jedno wykonanie obrotu pętli nie może nam popsuć niezmiennika.

Warunek $N \wedge \sim B \to \beta$ oznacza, że gdy skończymy wykonywać pętlę, mamy zagwarantowane spełnienie β. (nota bene N też jest spełnione!)

Dodatkowe dwie reguły

Wzmacnianie założenia i osłabianie tezy

$$\frac{\alpha \to \gamma,\ \{\alpha\}P\{\beta\}}{\{\gamma\}P\{\beta\}}$$

$$\frac{\{\alpha\}P\{\beta\},\ \beta \to \gamma,}{\{\alpha\}P\{\gamma\}}$$

Przykład

- {i>=0} i=i+1; {i>0}

Intuicja: formuła ta jest formułą prawdziwą, bo dla każdych danych, jeśli tylko i jest nieujemne, to po dodaniu jedynki i będzie dodatnie.

Ogólnie może się zdarzyć, że zmienna i po wykonaniu instrukcji i=i+1 przyjmie wartość <=0, ale nie w przypadku, gdy bezpośrednio przed jej wykonaniem miała wartość nieujemną, co jest zagwarantowane przez α = (i>=0).

Dowód: $i>=0 \leftrightarrow i+1>=1 \rightarrow i+1>0$

Przykład nieco ciekawszy

```
{true}
x=x0; y=y0; z=0;
while (x!>0) {
   if (x%2==1)  z+=y;
   x/=2;
   y+=y;
}
{z=f(x0,y0)}
```

Algorytm mnożenia chłopów rosyjskich

```
{true}
x=x0; y=y0; z=0; {x=x0 i y=y0 i z=0}
while (x!=0) { {z+xy=x0*y0}
   if (x%2==1) z+=y;
   x/=2;
   y+=y;
}
{z=x0*y0}
```

Algorytm mnożenia chłopów rosyjskich

```
{true}
x=x0; y=y0; z=0; {x=x0 i y=y0 i z=0}
while (x!=0) { {z+xy=x0y0}
   if  (x%2==1) z+=y;
 {(odd(x) ∧ z-y+xy=x0y0) ∨ (~odd(x)∧
   z+xy=x0y0)}
   x/= 2;
  {z+2xy=x0y0}
   y+=y;
  {z+xy=x0y0}
}
{z=x0y0}
```

Przykład jeszcze ciekawszy

```
{true}
x=x0; y=y0; z=1;
while (x!=0) {
   if (x%2==1) z*=y;
   x/=2;
   y*=y;
}
{z=f(x0,y0)}
```

Potęgowanie binarne (binpower)

{true}
x=x0; y=y0; z=1; $\{x=x0 \text{ i } y=y0 \text{ i } z=1\}$
while (x!=0) {$\{zy^{x}=y0^{x0}\}$
  if (x%2==1) z*=y;
 $\{(odd(x) \wedge (z/y)y^{x}=y0^{x0}) \vee (\sim odd(x) \wedge zy^{x}=y0^{x0})\}$
  x/=2;
 $\{zy^{2x}=y0^{x0}\}$
  y*=y;
 $\{zy^{x}=y0^{x0}\}$
}
$\{z=y0^{x0}\}$

Co dla danych ujemmych?

W przypadku mnożenia chłopów rosyjskich, jeżeli y<0, to nie ma problemu, ale jeśli x<0, y>0, to algorytm nie obliczy niewątpliwie iloczynu: będzie dodawał do z wyłącznie dodatnie wielokrotności y.

- x y z
- -11 2 0
- -6 4 2
- -3 8 2
- -2 16 10
- -1 32 10
- ...

Problem z zapętleniem

Nie chodzi nawet o to, że program się zapętli, ale że wyszło nam że jest poprawny (choć tylko częściowo), mimo że się zapętlił.

Warto rozważać mocniejszą wersję poprawności, zakładającą że nie tylko ma być program częściowo poprawny, lecz także zakończyć działanie i to bez błędu.

Poprawność programów

- Logika jest nieoceniona przy dowodzeniu poprawności programów.
- Więcej: przy konstrukcji algorytmów.
- Projektowanie pętli w programach jest najłatwiej zrobić stosując niezmienniki - warunki logiczne prawdziwe po każdym obrocie pętli.

Przykład

- {i>=0} i=i+1; {i>0}

jest formułą prawdziwą, bo dla każdych danych, jeśli tylko i jest nieujemne, to po dodaniu jedynki i będzie dodatnie.

Ogólnie może się zdarzyć, że zmienna i po wykonaniu instrukcji i:=i+1 przyjmie wartość <=0, ale nie w przypadku, gdy bezpośrednio przed jej wykonaniem miała wartość nieujemną, co jest zagwarantowane przez α.

Przykład nieco ciekawszy

- {}
- x=x0; y=y0; z=0;
- while (x!=0) {
-     if (x % 2 != 0) z+=y;
-     x /= 2;
-     y *=2;
- }
- {z=f(x0,y0)}

Przykład

x	y	z
11	5	0
5	10	5
2	20	15
1	40	15
0	80	55

x	y	z
5	11	0
2	22	11
1	44	11
0	88	55

Podsumowanie

Dbałość o precyzję wypowiedzi jest niezwykle istotna, szczególnie gdy używamy logiki do komunikowania się z komputerem (choćby języki zapytań w bazach danych).

Podsumowanie (2)

- Precyzja w logice polega w szczególności na jednoznaczności. Pamiętajmy, że niektóre wypowiedzi są niejednoznaczne w języku naturalnym.
- Stosując spójniki logiczne pamiętajmy o tym, że często wartość końcowa zależy od odpowiedniego narzucenia kolejności ich wykonania (nawiasy).

Ortografia też jest ważna

Moja stara piła leży w piwnicy i jest bezużyteczna

Moja stara piła, leży w piwnicy i jest bezużyteczna

Podsumowanie (3)

- Trzeba pamiętać o typowych błędach rachunkowych w logice:
  - przy negowaniu kwantyfikatorów
  - przy negowaniu koniunkcji lub alternatywy
    - $\neg(p \wedge q) \;\Leftrightarrow\; (\neg p \vee \neg q)$
    - $\neg(p \vee q) \;\Leftrightarrow\; (\neg p \wedge \neg q)$
  - przy zapominaniu o zależności wyniku od kolejności wykonywania działań na zdaniach
    - w szczególności $(p \wedge q) \vee r \neq p \wedge (q \vee r)$
    - ... a także $(p \rightarrow q) \rightarrow r \neq p \rightarrow (q \rightarrow r)$

O czym nie można mówić...

- ... o tym należy milczeć.

Ludwig Wittgenstein

<Mistrzostwa w Algorytmice i Programowaniu>

Projekt „Mistrzostwa w Algorytmice i Programowaniu – Uczniowie” jest finansowany ze środków pochodzących z „Programu Rozwoju Talentów Informatycznych na lata 2019-2029”

Dofinansowanie Projektu: 4.887.850,50 zł

Całkowita wartość Projektu: 5.460.850,50 zł

GOV.pl CYFRYZACJA

KPRM