



<Mistrzostwa
w Algorytmice
i Programowaniu>

MATEMATYKA W KONKURSACH ALGORYTMICZNO-PROGRAMISTYCZNYCH

Webinarium przeprowadzone
w ramach projektu
"Mistrzostwa w Algorytmice
i Programowaniu - Uczniowie",
finansowanego przez:



OTWARTY WEB-KURS

Piotr Chrzastowski-Wachtel
Uniwersytet Warszawski

Logika

Logika

- Jedna z najstarszych dyscyplin naukowych
- Zajmuje się wnioskowaniem – odkrywaniem nowych faktów na podstawie faktów uznanych za prawdziwe i reguł wnioskowania.
- Konieczna do uprawiania jakiejkolwiek nauki.
- Dyskusja z kimkolwiek, kto nie respektuje praw logiki nie ma sensu i jest stratą czasu!



Wszystko co da się powiedzieć...

- ...da się powiedzieć w prosty sposób.

Ludwig Wittgenstein

Arystoteles (384pne - 322pne)

- Arystoteles
 - Pierwszy, który zajął się logiką, jako dziedziną nauki
 - Podał zbiór sylogizmów – praw wnioskowania
 - Była to pierwsza próba metodologicznego podejścia do badań naukowych



Czy logika jest typową nauką?

- Jako jedyna musi też opisywać samą siebie!
- Konieczne staje się rozdzielenie metajęzyka od języka, a przynajmniej świadomość tego.
- Nie sposób uniknąć zapętlenia pojęciowego: mówiąc o logice używamy logicznego myślenia. Tłumacząc np. co to jest koniunkcja, mówimy, że $(p \ \& \ q)$ jest zdaniem prawdziwym, jeśli zarówno p , jak i q są prawdziwe. Masło maślane?

Średniowieczny podział nauki

■ Trivium

- **gramatyka** - biegłość w łacinie

- **retoryka** - sztuka układania mów, przekonywania.

- **logika - dialektyka, sztuka wnioskowania**

- Trivium było na ogół wstępem do kolejnego etapu nauki.

Średniowieczny podział nauki

- **Quadrivium**
 - **geometria,**
 - **arytmetyka**
 - **astronomia**
 - **muzyka**
- **Quadrivium było na ogół wstępem do nauki teologii i filozofii.**

Zdania – obiekty w logice

- Logika zajmuje się zdaniami pod kątem ich prawdziwości.
- Zdanie z punktu widzenia logiki klasycznej, to wypowiedź, której można przypisać znaczenie: prawda lub fałsz.
- Nie interesują nas wszelkie inne poprawne z punktu widzenia lingwistyki zdania: rozkazujące, pytające, czy nawet oznajmujące, ale o niemożliwej do ustalenia prawdziwości.

Problemy z językiem naturalnym

- Język naturalny jest często niejednoznaczny i znaczenie zależy od kontekstu wypowiedzi, albo od niepisanych zwyczajów
- Często zdanie, które z pozoru daje się jednoznacznie wartościować może się okazać różnie rozumiane przez odbiorców (komputer!)

Niejednoznaczność

- Kupimy sobie pizzę lub pójdziemy do kina
- Osoby wrażliwe i młode nie powinny tego filmu oglądać.
- Lek jest przeciwwskazany u chorych z niewydolnością wątroby oraz u chorych z niewydolnością nerek, jeśli nie ma możliwości oznaczenia stężenia leku w osoczu.
- Netflix wstrzymuje emisję filmów w domach i ośrodkach kultury.
- Trójkąt jest prostokątny, jeśli jeden z jego kątów jest prosty.

Streptococcus pneumoniae, *Moraxella catarrhalis*: ostre i przewlekłe zapalenia oskrzeli, rozstrzelone zapalenie oskrzeli. Zapalenia płuc wywołane przez *Pneumocystis carinii* oraz niektóre szpitalne zapalenia płuc wywołane przez pałeczki Gram-ujemne oraz w innych sytuacjach, gdy nie można zastosować β -laktamu a szczep wywołujący zakażenie jest wrażliwy na Bactrim.

Zapalenia zatok, ostre zapalenie ucha środkowego.

Ostre i przewlekłe zakażenia układu moczowego i gruczołu krokowego.

Zakażenia przenoszone drogą płciową: wrzód miękki, ziarniniak pachwinowy, niepowodzenie rzeźączka w przypadku uczulenia na β -laktamy.

Zakażenia przewodu pokarmowego: dur brzuszny i paradury (oraz leczenie nosicieli), salmonelloza, czerwonka bakteryjna, cholera (jako leczenie wspomagające obok uzupełniania płynów i elektrolitów), biegunka wywołana przez enteropatogenne i/lub enterotoksyczne szczepy *E. coli* (w tym biegunka podróżnych).

Inne zakażenia bakteryjne: na przykład Nokardioza.

Przeciwwskazania

Bactrim jest przeciwwskazany u chorych z niewydolnością wątroby oraz u chorych z niewydolnością nerek, gdy nie ma możliwości oznaczenia stężenia leku w osoczu.

Bactrim nie powinien być podawany pacjentom ze stwierdzoną wcześniej nadwrażliwością na trimetoprim lub fonamidy.

Preparatu Bactrim nie należy stosować u wcześniaków lub niemowląt w ciągu pierwszych 7 dni życia.

Środki ostrożności

Ryzyko wystąpienia poważnych objawów niepożądanych zwiększa się u pacjentów w podeszłym wieku lub dodatkowo obciążonych np. z niewydolnością nerek i/lub wątroby, jednoczesnym stosowaniem innych środków (w tym przypadku ryzyko może być związane z dawką leku i czasem leczenia). Opisywano rzadkie przypadki zgonów w przebiegu stosowania preparatu, w tym z reakcjami niepożądanymi takimi jak: zmiany w obrazie krwi, zespół Stevens-Johnsona, toksyczna nekroliza naskórkowa (zespół Lyella) i piorunująca martwica wątroby.

W celu zmniejszenia ryzyka wystąpienia objawów niepożądanych leczenie preparatem Bactrim należy rozpocząć z ostrożnością, szczególnie u chorych w podeszłym wieku.

Zdania atomowe i złożone

- Zdania atomowe zazwyczaj dotyczą jakiejś dziedziny i są w niej interpretowane – to się dzieje poza rachunkiem logicznym.
- Logika zaczyna się wtedy, gdy zaczynamy składać zdania atomowe w złożone i prowadzi wnioskowanie, polegające na ustalaniu prawdziwości pewnych zdań na podstawie zależności wyrażonych w języku logiki.

Brak przecinka ocalił ośrodek dla niewidomych

- 14.10.2011: Gazeta Wyborcza donosi
- **„*Brak przecinka ocalił ośrodek dla niewidomych*”**
- Chodziło o to, że ośrodek rehabilitacji niewidomych według przepisów powinien zatrudniać specjalistów psychologów z odpowiednim doświadczeniem, szczególnie gdy chodziło o pracę z dziećmi. Zatem sformułowanie przepisu było następujące:

Jak precyzyjnie sformułować stosowny przepis?

- „... w placówce powinien być zatrudniony psycholog lub psycholog w dziedzinie psychologii klinicznej z pięcioletnim stażem pracy z dziećmi z upośledzeniem widzenia.”
- Przy Karmelickiej - ośrodku dla dorosłych - pracowali psycholodzy (nieklinikzni), ale bez doświadczenia pracy z dziećmi. A urzędnicy NFZ i Ministerstwa Zdrowia uważali, że zarówno psycholog, jak i psycholog kliniczny powinni mieć takie doświadczenie.
- W rezultacie ośrodek miał być zamknięty - NFZ cofnął dotację

Kłopoty ze spójnikami

- Kłopot lub/albo.
 - Dla wielu ludzi te spójniki są nierozróżnialne
 - Część ludzi odrzuca przypisanie spójnikowi "lub" prawdy, gdy oba jego składniki są prawdziwe
 - Często w różnych instrukcjach spotyka się dziwną konstrukcję "lub/i".

Kłopoty ze spójnikami

- Kłopot lub/i.
 - Dla wielu ludzi te spójniki też są nierozróżnialne (sic!)
 - Oba te spójniki bywają zastępowane przecinkami w wyliczeniach
 - Przykłady:
 - Stosujemy ten lek w stanach grypowych, zaziębieniu i zapaleniu górnych dróg oddechowych.
 - Nie stosujemy leku w przypadkach niewydolności nerek, wątroby i trzustki.

Kłopoty ze spójnikami

■ Kłopot z implikacją

□ To, że implikacja jest fałszywa tylko w przypadku gdy przesłanka jest prawdziwa, a wniosek fałszywy budzi u niektórych (uzasadniony) niepokój.

□ O ile spokojnie akceptujemy, jako sensowne, zdanie

"Jeśli pada deszcz, to jezdnia jest mokra",
o tyle trudniej nam przychodzi zaakceptować
zdanie

"Jeśli świeci słońce, to dzisiaj odbywa się wykład z logiki".

Kłopoty ze spójnikami

Kłopot z implikacją został przez logików zauważony na początku XX wieku i był impulsem do odróżnienia implikacji klasycznej, która może być fałszywa, od tzw. mocnej implikacji (entailment), która wskazuje na związek przyczynowo-skutkowy i która zawsze jest prawdziwa.

Zdanie "Jeśli świeci słońce, to dzisiaj odbywa się wykład z logiki" nie byłoby uznane za prawdziwe w mocniejszym sensie.

Język logiki

- W logice używamy stałych zdaniowych $(0, 1)$, zmiennych zdaniowych, wybranych spójników logicznych, kwantyfikatorów

Semantyka negacji

p	$\neg p$
0	1
1	0

Semantyka alternatywy (lub)

$p \vee q$	0	1
0	0	1
1	1	1

Semantyka koniunkcji (i)

$p \wedge q$	0	1
0	0	0
1	0	1

Semantyka implikacji (jeśli-to)

$p \rightarrow q$	0	1
0	1	1
1	0	1

Semantyka równoważności (wtedy i tylko wtedy)

$p \leftrightarrow q$	0	1
0	1	0
1	0	1

Semantyka alternatywy wyłączającej (albo-albo)

$p \oplus q$	0	1
0	0	1
1	1	0

Wzajemna wyrażalność spójników logicznych

- Nasz język mógłby się składać z tylko dwóch spójników: negacji i alternatywy. Zachodzą bowiem tożsamości

$$\square p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$$

$$\square p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

$$\square p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$\square p \oplus q \Leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q)$$

Binegacja

- Okazuje się, że cały rachunek zdań można wyrazić za pomocą jednej tylko operacji logicznej: binegacji, lub NOR (negacja "or"), czytanej jako "ani – ani”:

$p \downarrow q$	0	1
0	1	0
1	0	0

Binegacja wystarcza!

- Wyrażalność negacji i alternatywy za pomocą binegacji:

□ negacja:

p	$p \downarrow p$
0	1
1	0

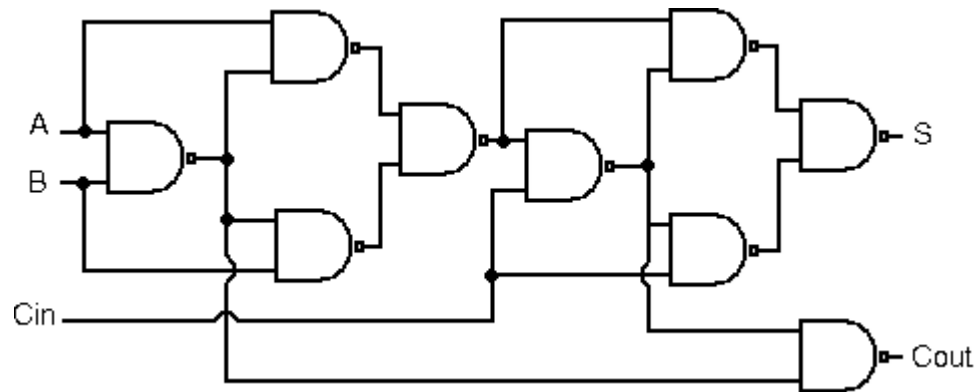
□ alternatywa:

p	q	$p \downarrow q$	$(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	1

NAND

- Operator NAND przyjmuje wartość fałsz wtedy i tylko wtedy gdy oba argumenty są prawdziwe (strzałka lub kreska Sheffera)

1-bitowy sumator

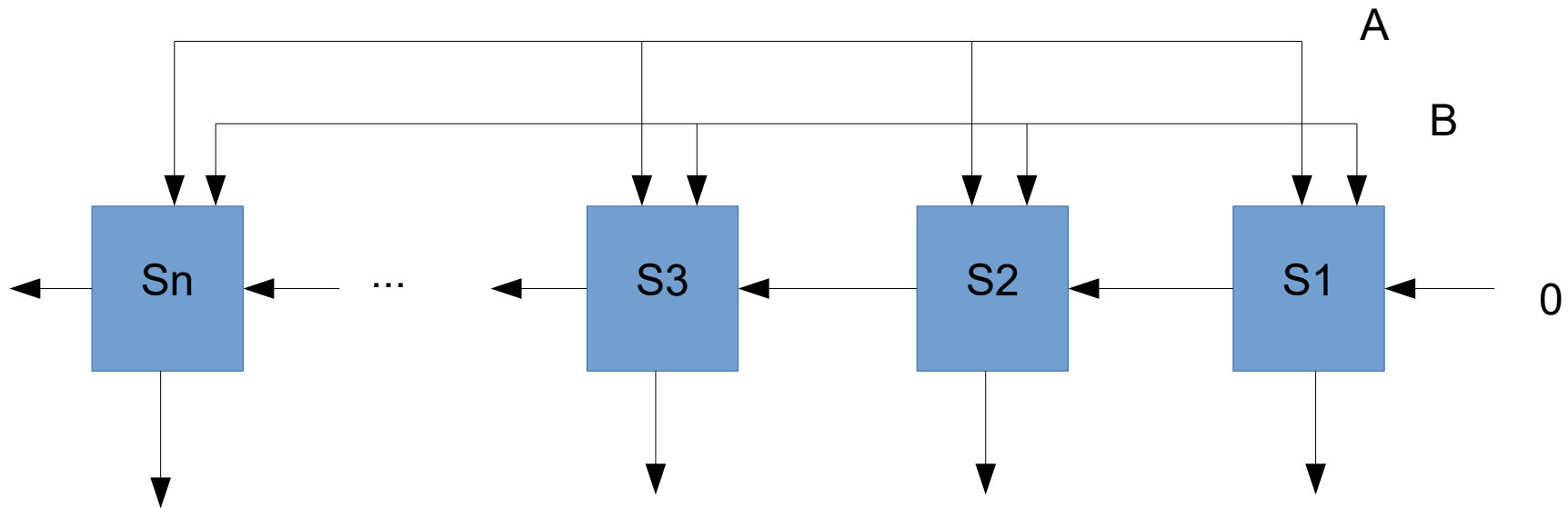


Sumator zbudowany z samych bramek

NAND

Sumator n-bitowy

Wystarczy teraz połączyć 1-bitowe sumatory w szereg:



Implikacja i fałsz też wystarczają

- Okazuje się, że bramka implikacji i fałszu (ta ostatnia wyjątkowo łatwa do zaimplementowania) też wystarczają.

Nieoczekiwany wniosek

- Komputer jest układem bramek logicznych
- Można go zbudować z jednego typu bramek: NAND lub NOR
- I tak się wiele razy działo!

Algebra Boole'a

George Boole zauważył, że na formułach zdaniowych można rachować jak na zbiorach.

Jeśli $A = \{x: p(x)\}$, $B = \{x: q(x)\}$, to

- $\neg A = \{x: \neg p(x)\}$
- $A \cup B = \{x: p(x) \vee q(x)\}$
- $A \cap B = \{x: p(x) \wedge q(x)\}$
- $A \subseteq B \Leftrightarrow p(x) \rightarrow q(x)$ (p jest mocniejsze od q)
- $\emptyset = \{x: 0\}$ (zbiór pusty)
- $U = \{x: 1\}$ (cała przestrzeń)

Tautologie

Zdania logiczne zawsze prawdziwe nazywamy tautologiami.

Tautologie nie wnoszą żadnej wiedzy o świecie – są spełnione wszędzie, więc nie definiują żadnego obiektu.

Pozwalają wyrażać te same fakty w różny sposób; tak naprawdę są one różnymi postaciami prawdy logicznej!

Przykłady tautologii

$$p \vee \neg p$$

$$p \rightarrow p$$

$$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$$

$$(p \wedge q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$$

$$(p \vee q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

oraz standardami EN 12756

MIÓD PSZCZELI

NEKTAROWY WIELOKOMPOZYTOWY

Mieszanka miodów pochodzących
państw członkowskich Unii Europejskiej
i spoza Unii Europejskiej.

Wartość odżywcza dla 100 g produktu.

wartość energii	300 kcal / 1350 kJ
białko	0,3 g
węglowodany	79,5 g
tluszcze	0,0 g



Projekt „Mistrzostwa w Algorytmice i Programowaniu – Uczniowie” jest finansowany ze środków pochodzących z „Programu Rozwoju Talentów Informatycznych na lata 2019-2029”

Dofinansowanie Projektu: 4.887.850,50 zł

Całkowita wartość Projektu: 5.460.850,50 zł



Publikacja multimedialna wyraża jedynie poglądy autorów i nie może być utożsamiana z oficjalnym stanowiskiem Kancelarii Prezesa Rady Ministrów