<Mistrzostwa
w Algorytmice
i Programowaniu>
MATEMATYKA W KONKURSACH
ALGORYTMICZNO-PROGRAMISTYCZNYCH
OTWARTY WEB-KURS
Webinarium przeprowadzone
w ramach projektu
"Mistrzostwa w Algorytmice
i Programowaniu - Uczniowie",
finansowanego przez:
GOV.pl CYFRYZACJA
KPRM

Piotr Chrząstowski-Wachtel
Uniwersytet Warszawski

Relacje równoważności
Relacje porządku

Relacja równoważności

- Jedno z najważniejszych narzędzi porządkowania rzeczywistości.
- Chodzi o ukrycie nieistotnych szczegółów i skoncentrowanie sie na istotnych różnicach
- Pozwala na klasyfikację podzbiorów danego zbioru ze względu na takie cechy, które uznamy za ważne.

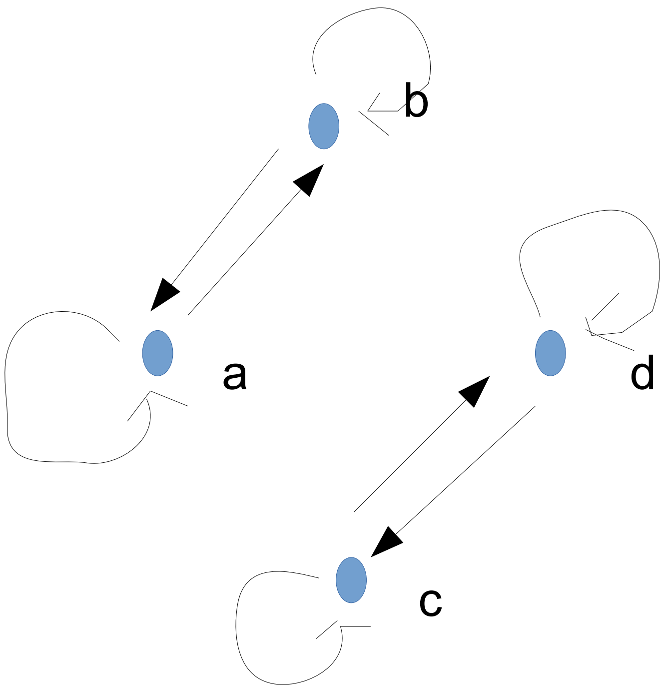
Relacja równoważności

- Relację R w zbiorze X nazwiemy relacją równoważności, jesli jest ona
  - zwrotna
  - symetryczna
  - przechodnia
- Przykłady:
  - Relacja równoległości prostych na płaszczyźnie,
  - Relacja $\equiv_n$ przystawania modulo n w N.
  - Relacja identyczności w X
  - Relacja pełna

Graf przykładowej relacji równoważności

Niech A={a,b,c,d}.

r={(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)(a,b),(b,a),(c,d),(d,c)}



Dalsze przykłady relacji równoważności

Przykłady:

- Relacja bycia w tej samej grupie ćwiczeniowej z “Matematyki dyskretnej” wśród studentów I roku,
- Relacja podobieństwa trójkątów na płaszczyźnie.
- Relacja przystawania trójkątów na płaszczyźnie
- Relacja osiągalności drogowej na mapie samochodowej
- Relacja bycia rodzeństwem (rodzonym, czyli posiadania pary tych samych rodziców)

Antyprzykłady relacji równoważności

Nie są natomiast relacjami równoważności:

- Relacja bycia w tej samej grupie z czegokolwiek wśród studentów I roku,
- Relacja posiadania telefonu u tego samego operatora.
- Relacja bycia krewnym (posiadania wspólnego przodka) wśród żyjących ludzi (zakładamy, że każdy jest szczególnym przypadkiem swojego przodka)
- Relacja bycia rodzeństwem przyrodnim

Podziały

W dowolnym zbiorze X podziałem nazwiemy taki zbiór jego niepustych podzbiorów $X_1, X_2, X_3, \ldots$ że

(i) $X = X_1 \cup X_2, \cup X_3 \cup \ldots$

(ii) Dla każdych i,j zachodzi $i \neq j \rightarrow X_i \cap X_j = \emptyset$

- Zatem podział polega na zaszeregowaniu każdego elementu zbioru X do jednego i tylko jednego ze zbiorów X_i, które w sumie wyczerpują zbiór X.
- Podziały mogą być skończone lub nieskończone.

Zasada abstrakcji

Między podziałami, a relacjami równoważności istnieje odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna (bijekcja), ustalona przez zrównoważenie wszystkich elementów każdego ze zbiorów podziału.

Innymi słowy: jeśli między elementami zbioru X określimy relację „bycia w tym samym zbiorze podziału”, to relacja ta będzie relacją równoważności.

Klasy abstrakcji

- Z drugiej strony, jeśli mamy daną relację równoważności R w zbiorze X, to przeciwdziedziną funkcji $f:X\rightarrow 2^X$ określonej dla każdego elementu następująco: $f(a)=\{b \in X: (a,b) \in R\}$ jest podział zbioru X. Obraz tak zdefiniowanej funkcji f dla każdego elementu a nazywamy klasą abstrakcji a, zaś a reprezentantem tej klasy abstrakcji.
- Zauważmy, że klasę abstrakcji definiuje dowolny jej reprezentant równie dobrze – wszystkie jej elementy są równoważne jak sama nazwa wskazuje.

Przykłady podziałów

RELACJA	KLASY ABSTRAKCJI
Rodzeństwo	Rozłączne zbiory braci i sióstr rodzonych
Podobieństwo trójkątów	Klasy trójkątów o identycznych kształtach
Równoległość prostych	Kierunki (wszystkie proste biegnące w tym samym kierunku)
Przystawanie modulo 3	Zbiory liczb dających tę samą resztę z dzielenia przez 3
Osiągalność drogowa	Wyspy, kontynenty,...

Porządki

W dowolnym zbiorze X relacją porządku częściowego nazwiemy każdą relację, która jest

- zwrotna
- antysymetryczna
- przechodnia.

Jeśli dodatkowo relacja jest spójna, to nazywamy ją relacją porządku liniowego.

Przykłady

1) Relacja mniejsze-równe w zbiorze liczb naturalnych

2) Relacja większe-równe w zbiorze liczb naturalnych

3) Relacja mniejsze-równe w zbiorze liczb rzeczywistych,

4) Relacja identyczności w dowolnym zbiorze

5) Relacja między wektorami przestrzeni R^n, zdefiniowana następująco:

$(x_1,\ldots,x_n) \leq (y_1,\ldots,y_n) \leftrightarrow \forall\ i=1,\ldots,n: x_i \leq y_i$.

6) Zawieranie się podzbiorów dowolnego zbioru.

Relacje 1, 2, 3 są porządkami liniowymi; 4, 5, 6 nie.

Dalsze przykłady

Na płaszczyźnie zespolonej dwie liczby (a+bi) oraz (c+di) można uporządkować na wiele sposobów; proszę zauważyć, że nie ma kanonicznego porzadku, tak jak dla liczb rzeczywistych. Przykładowo:

- $(a+bi) \leq_{\kappa} (c+di) \leftrightarrow (a<c) \vee (a=c \;\&\; b \leq d)$
  porządek kartezjański

- $re^{\varphi i} \leq_{\beta} \rho e^{\phi i} \leftrightarrow (r<\rho) \vee (r=\rho \;\&\; \varphi \leq \phi)$
  porządek biegunowy

Oba te porządki są porządkami liniowymi.

Dalsze przykłady

Porządek leksykograficzny (słownikowy)

- Dwa napisy: $a_1a_2...a_n$ oraz $b_1b_2...b_m$ nad skończonym alfabetem można uporządkować w następujący sposób. Powiemy, że napis $a_1a_2...a_n \leq b_1b_2...b_m$, jeśli dla pewnego k: $(a_1a_2...a_k = b_1b_2...b_k)$ oraz ((k=n) lub (k<n & k<m & $a_{k+1} < b_{k+1}$)).

Porządek leksykograficzny też jest porządkiem liniowym.

Zbiory można porządkować na różne sposoby.

X={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,…,98,99,100}

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,…,98,99,100

0,1,10,100,11,12,13,…,19,2,20,21,22,…,29,3,30...98,99

40,44,42,49,41,48,45,47,46,43,14,4,2,20,24,…,13,0

Zbiory można porządkować na różne sposoby.

X={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,…,98,99,100}

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,…,98,99,100

0,1,10,100,11,12,13,…,19,2,20,21,22,…,29,3,30...98,99

40,44,42,49,41,48,45,47,46,43,14,4,2,20,24,…,13

- czterdzieści, czterdzieści cztery, czterdzieści dwa, czterdzieści dziewięć, czterdzieści jeden, czterdzieści osiem, czterdzieści pięć, czterdzieści siedem, czterdzieści sześć, czterdzieści trzy, czternaście, dwa,dwadzieścia, dwadzieścia cztery,…,trzynaście,zero. :)

Elementy minimalne i najmniejsze

W zbiorze X uporządkowanym (częściowo) przez relację $\leq$ element a nazwiemy minimalnym, jeśli nie istnieje takie b $\in$X, że b $\leq$ a, i jednocześnie b$\neq$a.

Element a jest najmniejszy w X, jeśli dla każdego c $\in$X zachodzi a$\leq$c.

Zachodzą takie dwa fakty:

- W zbiorze może istnieć co najwyżej jeden element najmniejszy.
- Element najmniejszy jest zawsze minimalny

Elementy maksymalne i największe

W zbiorze X uporządkowanym (częściowo) przez relację $\leq$ element a nazwiemy maksymalnym, jeśli nie istnieje takie $b \in X$, że $a \leq b$ i jednocześnie $a \neq b$.

Element a jest największy w X, jeśli dla każdego $c \in X$ zachodzi $c \leq a$.

Zachodzą takie dwa twierdzenia:

- W zbiorze może istnieć co najwyżej jeden element największy.
- Element największy jest zawsze maksymalny

Elementy maksymalne i największe

Inaczej równoważnie: element minimalny, to taki, że nie ma od niego mniejszego. Najmniejszy to taki, że wszystkie inne są od niego większe.

Element maksymalny, to taki, że nie ma od niego większego, a największy to taki, że wszystkie inne są od niego mniejsze.

Są to pojęcia dualne.

Twierdzenie o dualności

R jest relacją porządku (liniowego) wtedy i tylko wtedy, gdy R^{-1} jest relacją porządku (linowego). Elementy minimalne relacji R są maksymalne dla relacji R^{-1}, a najmniejsze stają się największe i na odwrót.

Przykłady

Niech X będzie zbiorem niepustych pozbiorów zbioru {a,b,c}.

X={{a},{b},{c},{a,b},{a,c},{b,c},{a,b,c}}.

Relacja zawierania się zbiorów $\subseteq$ jest relacją porządku w zbiorze X.

W zbiorze tym {a,b,c} jest elementem największym. Nie ma w nim elementu najmniejszego (zbiór pusty byłby nim, ale go nie ma!), ale są 3 elementy minimalne: {a}, {b},{c}.

Porządek częściowy w N^n

Dla dwóch wektorów a=[a1,a2,…,an], b=[b1,b2,…,bn]

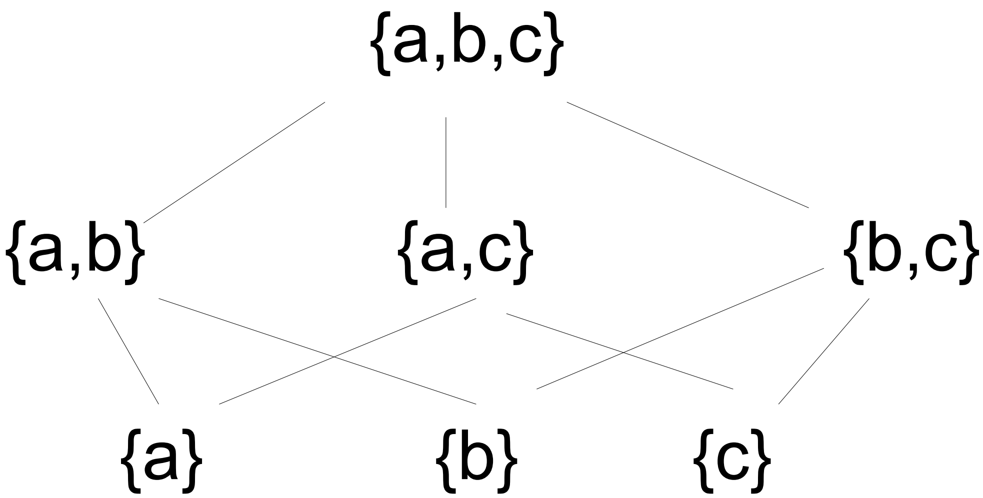
powiemy, że

- $a \leq b$ jeśli $a1 \leq b1$, $a2 \leq b2$,…,$an \leq bn$
- $a < b$, jeśli $a1 < b1$, $a2 < b2$,…,$an < bn$
- $a \lneq b$ jeśli $a \leq b$ oraz $a \neq b$

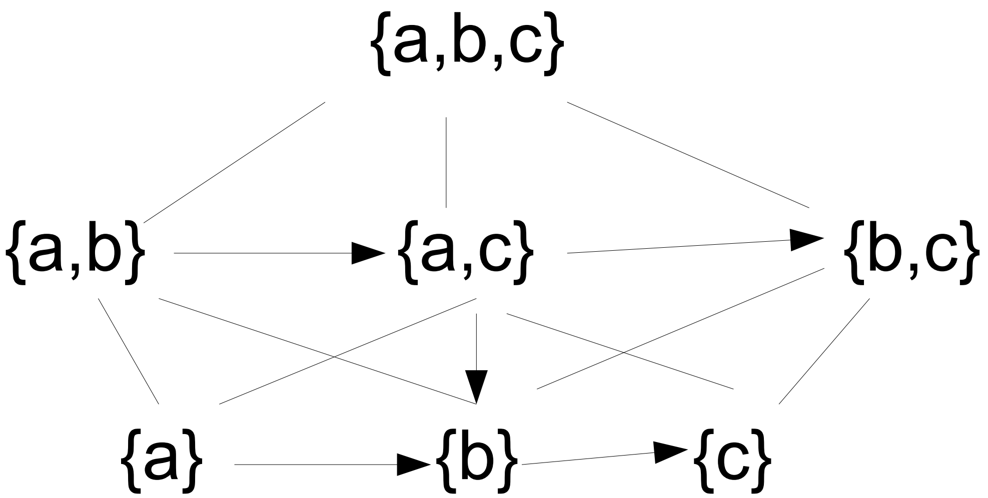
Lemat Dicksona

Dowolny podzbiór przestrzeni N^n ma skończoną liczbę elementów minimalnych.

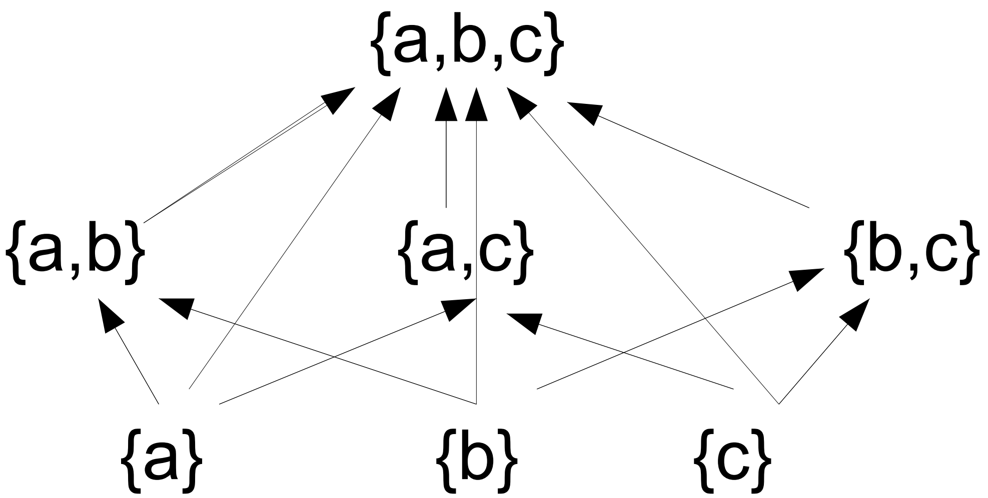
Diagram Hasego



Rozszerzenie do porządku liniowego



To nie jest diagram Hasego



W diagramie Hasego pomijamy strzałki wynikające z przechodniości i (zazwyczaj) staramy się używać grawitacji do definiowania grotów.

Twierdzenie Szpilrajna

Każdy porządek częściowy można rozszerzyć do porządku liniowego.

Algorytmy, które to robią nazywają się *sortowaniem topologicznym*.

Praktyczne zastosowanie porządków liniowych

Porządki liniowe są podstawą algorytmów wyszukiwania binarnego.

Jedną z metod uzyskania szybkiego dostępu do danych jest ustalenie na nich relacji liniowego porządku i zastosowanie metody polegającej na odrzucaniu połowy danych po odpowiedzi na zadane pytanie.

Algorytm wyszukiwania binarnego

// Dane: ciąg `A[1]≤A[2]≤...≤A[n]` oraz `x`

// Nadaj zmiennej `jest` wartość `true` jeśli istnieje takie $1 \leq i \leq n$, że `A[i]=x`.

Algorytm wyszukiwania binarnego

```
lewy:=1; prawy:=n;
while (lewy<prawy)
  begin
   s:=(lewy+prawy) / 2;
   if (x>A[s]) then lewy:=s+1
                 else prawy:=s;
  End;
jest := (x=A[lewy]);
```

Algorytm wyszukiwania binarnego

Złożoność algorytmu wyszukiwania binarnego jest logarytmiczna, czyli

$$\Theta(\log n)$$

Za każdym razem bowiem odrzucamy połowę lub prawie połowę danych (z dokładnością do 1). Zatem liczność zbioru, który pozostał do przebadania spada dwukrotnie.

Porządek na relacjach

Relacje w dowolnym zbiorze można uporządkować za pomocą zawierania.

Wszystkie relacje równoważności są w szczególności uporządkowane w naturalny sposób, w którym relacja identyczności jest najmniejszym, a relacja pełna największym elementem.

Przykład

Rozważmy wszystkie relacje równoważności w 3-elementowym zbiorze {a,b,c}. Jest ich pięć o następujących klasach abstrakcji:

1) {a}, {b}, {c} *(relacja identyczności)*

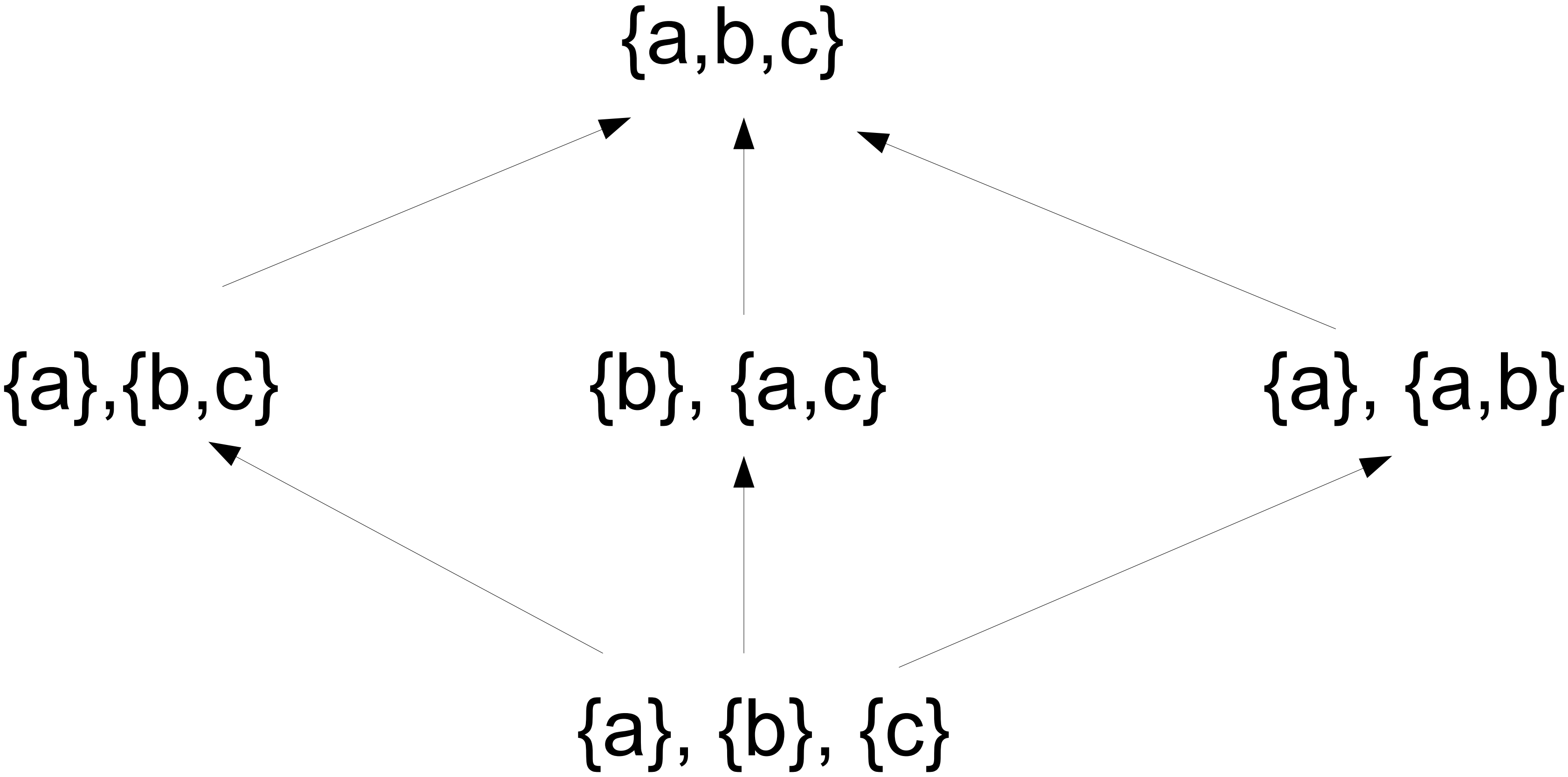
2) {a},{b,c}

3) {b}, {a,c}

4) {c}, {a,b}

5) {a,b,c} *(relacja pełna)*

Przykład



Przykład

{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a),(b,c),(c,b)}

{(a,a),(b,b),(c,c),(b,c),(c,b)}   {(a,a),(b,b),(c,c),(c,a),(a,c)}   {(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a)}

{(a,a),(b,b),(c,c)}

Inna charakteryzacja hierarchii relacji równoważności

Dane są dwie relacje równoważności: r,q określone w zbiorze X o klasach abstrakcji odpowiednio $\{R_i\}_{i \in I}$ oraz $\{Q_j\}_{j \in J}$.

Następujące 2 warunki są równoważne:

1. $r \subseteq q$
2. Dla każdego $i \in I$ istnieje $j \in J$: $R_i \subseteq Q_j$

Ponadto z $r \subseteq q$ wynika, że dla każdego $j \in J$ istnieje $i \in I$: $R_i \subseteq Q_j$ (nie jest równoważne!)

Pokrycia

Rozważmy zbiór X i rodzinę niepustych jego podzbiorów $P=\{X_1,X_2,X_3\ldots.\}$.

Rodzinę P nazwiemy *pokryciem* zbioru X, jeśli $X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup \ldots = X$

Pokrycie P nazwiemy *właściwym*, jeśli nie istnieją takie i,j, że $i \neq j$ oraz $X_i \subseteq X_j$.

Pokrycie może być skończone lub nieskończone.

Relacje podobieństwa

Relacją podobieństwa w zbiorze X nazwiemy każdą relację, która jest jednocześnie zwrotna i symetryczna.

Żądamy więc tylko, żeby każdy element był w relacji z samym sobą (był podobny do siebie samego) i żeby podobieństwo zachodziło zawsze w obu kierunkach.

Nie żądamy przechodniości!

Kliki

Kliką relacji określonej w zbiorze X nazwiemy każdy taki podzbiór K zbioru X, w którym wszystkie elementy są ze sobą w relacji (czyli relacja ograniczona do K jest kwadratem kartezjańskim K, czyli $K \times K$).

Klika K jest *maksymalna*, jeśli dodanie do K jakiegokolwiek elementu z X do niej nienależącego spowoduje, że przestanie być kliką.

Twierdzenie o pokryciach

Między pokryciami właściwymi, a relacjami podobieństwa istnieje wzajemny związek:

- każde pokrycie właściwe wyznacza dokładnie jedną relację podobieństwa w sposób pokazany na następnym slajdzie.

Twierdzenie o pokryciach

Niech $P=\{P_j\}_{j\in J}$ będzie pokryciem właściwym zbioru X.

Wtedy relacja $p\subseteq X\times X$ zdefniowana następująco:

$(x,y) \in p$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $j \in J$ takie, że $x \in P_j$ oraz $y \in P_j$,

jest relacją podobieństwa.

Związek twierdzenia o pokryciach z zasadą abstrakcji

Podziały są pokryciami właściwymi, a relacje równoważności są szczególnymi przypadkami relacji podobieństwa.

Twierdzenie o pokryciach staje się zasadą abstrakcji, gdy pokrycie jest podziałem lub relacja podobieństwa jest relacją równoważności.

<Mistrzostwa w Algorytmice i Programowaniu>

Projekt „Mistrzostwa w Algorytmice i Programowaniu – Uczniowie” jest finansowany ze środków pochodzących z „Programu Rozwoju Talentów Informatycznych na lata 2019-2029”

Dofinansowanie Projektu: 4.887.850,50 zł

Całkowita wartość Projektu: 5.460.850,50 zł

GOV.pl CYFRYZACJA

KPRM