MATEMATYKA W KONKURSACH ALGORYTMICZNO-PROGRAMISTYCZNYCH

<Mistrzostwa w Algorytmice i Programowaniu>

OTWARTY WEB-KURS

Webinarium przeprowadzone w ramach projektu "Mistrzostwa w Algorytmice i Programowaniu - Uczniowie", **finansowanego przez:**

Piotr Chrząstowski-Wachtel
Uniwersytet Warszawski

Relacje

Relacje

- Jedno z podstawowych pojęć matematyki
- Zaskakująco prosta definicja
- Uogólnienie pojęcia funkcji
- Podstawa organizacji danych w bazach danych

Iloczyn kartezjański

- Dla zbiorów A, B definiujemy pojęcie pary uprządkowanej (a,b) w sposób podany przez Kazimierza Kuratowskiego.
- Para uporządkowana (a,b), to zbiór {{a,b},a}, w którym $a\in A$ i $b\in B$.
- Zbiór par uporządkowanych ze zbiorów A,B oznaczamy przez $A\times B$.
- Indukcyjnie definiujemy iloczyn kartezjański n zbiorów $A_1,A_2,\ldots A_n$, jako $A_1\times(A_2\times\ldots\times A_n)$.

Definicja

- Jeśli danych jest n zbiorów $A_1, A_2, \ldots A_n$, , to każdy podzbiór iloczynu kartezjańskiego $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, nazwiemy relacją (n-argumentową).
- W szczególności gdy n=2, to taką relację nazwiemy binarną.
- Jeśli relacja binarna określona jest między elementami jednego zbioru, to mówimy, że jest określona w zbiorze.

Przykłady relacji

- Relacja "leżenia między" na ustalonej prostej: wszystkie takie trójki punktów (x,y,z) na prostej, że y leży między x a z.
- Relacja pusta
- Relacja pełna - wszystkie krotki n-elementowe z odpowiednich zbiorów.
- Relacja równoległości prostych określona między parami prostych na płaszczyźnie (czyli zbiór wszystkich takich par (l,k), że l jest równoległa do k).

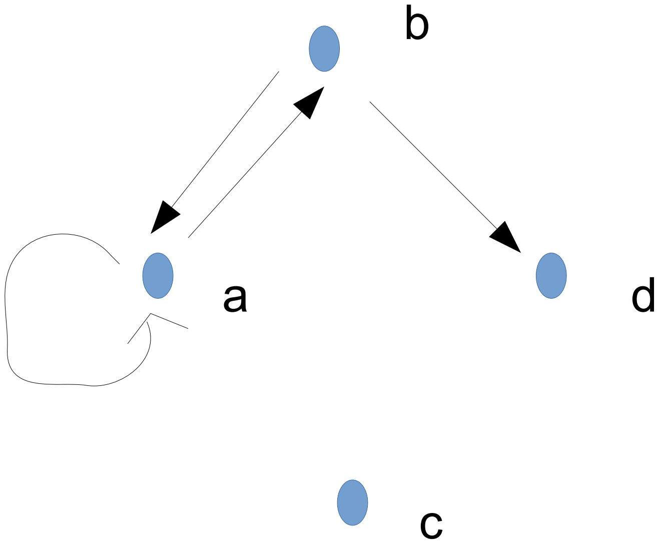
Przykłady relacji binarnych

- Relacja identyczności: $id_A=\{(x,x): x\in A\}$ - dotyczy dowolnego zbioru A.
- Relacja mniejszości w liczbach naturalnych:

  $<_N=\{(m,n)\in N^2 : m<n\}$
- Relacja mniejszości w liczbach rzeczywistych: $<_R=\{(a,b)\in R^2 : a<b\}$
- Relacja prostopadłości prostych na płaszczyźnie,
- Relacja $\equiv_n$ przystawania modulo n w N.

Graf relacji

Niech A={a,b,c,d}.
r={(a,a),(a,b),(b,a),(b,d)}



Dziedzina relacji

- Dziedziną relacji $r \subseteq A \times B$ jest zbiór
  $$Dom(r) = \{x \in A: \exists y \in B: (x,y) \in r\}$$
- Przeciwdziedziną relacji $r \subseteq A \times B$ jest zbiór
  $$Cod(r) = \{y \in B: \exists x \in A: (x,y) \in r\}$$
- W przykładzie z poprzedniego slajdu $Dom(r)=\{a,b\}$, $Cod(r)=\{a,b,d\}$.

Funkcje częściowe i całkowite

- Relacja $r \subseteq A \times B$ jest funkcją częściową wtedy i tylko wtedy gdy

  $\forall x \in A \ \ \forall y_1, y_2 \in B: ((x,y_1) \in r \wedge (x,y_2) \in r) \rightarrow y_1 = y_2$
- Funkcja częściowa r jest funkcją całkowitą (albo w skrócie po prostu funkcją), jeśli dodatkowo $Dom(r)=A$.
- Zauważmy, że pojęcie dziedziny funkcji pokrywa się tu z pojęciem dziedziny relacji (szczególnej relacji będącej funkcją).

Przykład

$f(x)=x^2$

dla x naturalnego.

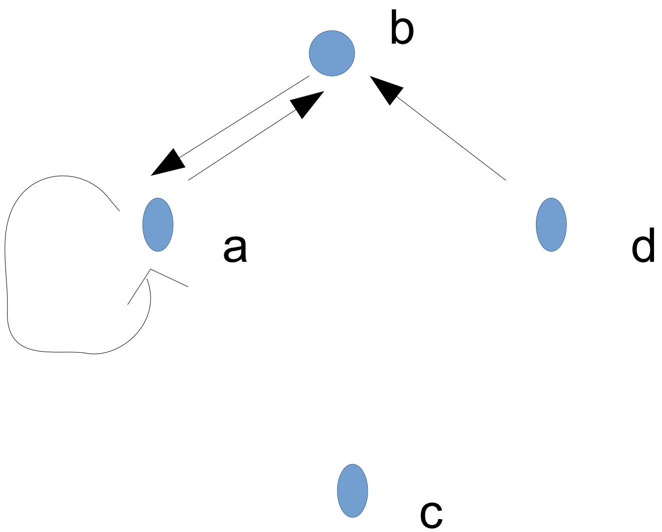
$f=\{(0,0),(1,1),(2,4),(3,9),(4,16),...\}$

Relacje i funkcje odwrotne

- Relacja $r^{-1} \subseteq B \times A$ jest relacją odwrotną względem relacji $r \subseteq A \times B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $r^{-1} = \{(b,a) \in B \times A: (a,b) \in r\}$.
- W szczególności funkcja odwrotna, jeśli istnieje, jest po prostu relacją odwrotną.
- Aby funkcja odwrotna do funkcji f istniała, konieczne jest, aby f była różnowartościowa, czyli taka, że $\forall x_1, x_2 \in A: (f(x_1)=f(x_2)) \rightarrow (x_1=x_2)$.
- $Dom(f)=Cod(f^{-1})$ oraz $Cod(f)=Dom(f^{-1})$

Graf relacji

Niech A={a,b,c,d}.
r={(a,a),(a,b),(b,a),(b,d)}
r^{-1}={(a,a),(b,a),(a,b),(d,b)}



Szczególne funkcje

- Funkcję f: A→B nazywamy
  - injekcją (funkcją 1-1), jeśli jest różnowartościowa
  - surjekcją, (funkcją “na”), jeśli Cod(f)=B
  - bijekcją, (funkcją „1-1” i „na”), jeśli jest jednocześnie injekcją i surjekcją.

Przykłady

- Dla $f: R_+ \to R$, $g: R \to R$, $h: R \to R_+$, $k: R \to R_+ \cup \{0\}$
  - $f(x)=\log_2 x$
  - $g(x)=2^x$
  - $h(x)=2^x$
  - $k(x)=x^2$

Funkcja f jest „1-1” i jest „na”.
Funkcja g jest „1-1”, ale nie jest „na”.
Funkcja h jest „1-1” i jest „na”
Funkcja k nie jest „1-1”, ale jest „na”.
Ponadto $f=h^{-1}$ oraz $h=f^{-1}$

Złożenie relacji

- Jedna z najważniejszych definicji tego kursu!
- Jeśli dane są relacje
  - $r \subseteq A \times B$,
  - $s \subseteq B \times C$,

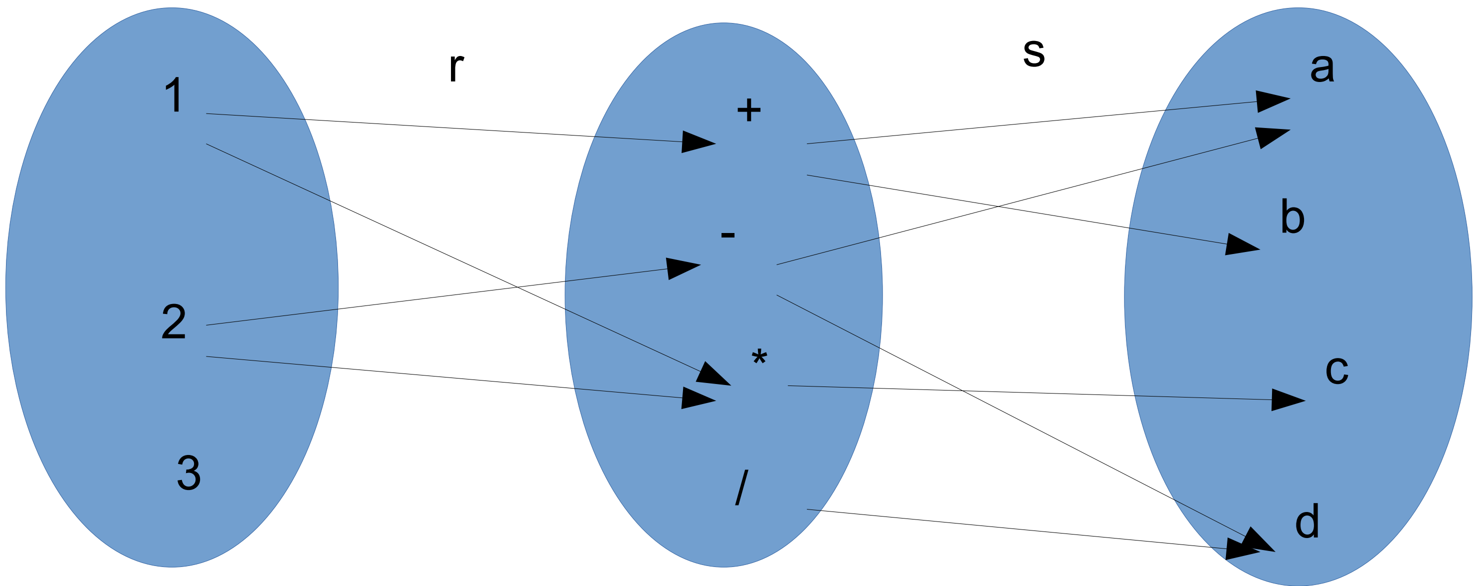
to ich złożeniem $r \cdot s \subseteq A \times C$ nazwiemy relację między zbiorami A i C zdefiniowaną następująco:

  - $r \cdot s = \{(a,c): \exists b \in B: (a,b) \in r \text{ oraz } (b,c) \in s\}$

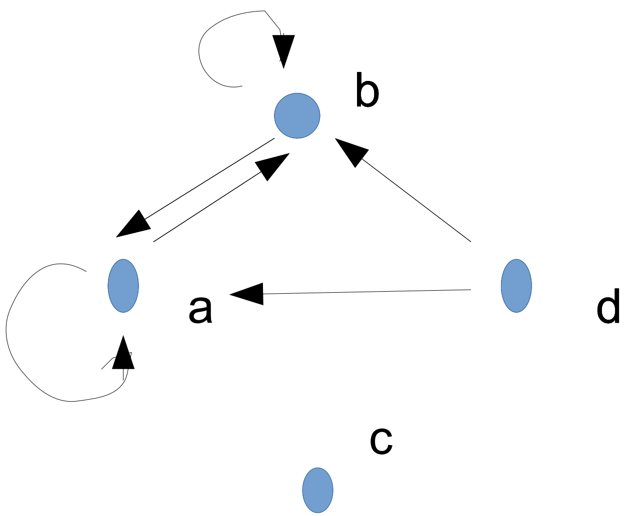
Czasami pomija się znaczek •, tak jak przy mnożeniu.

Przykłady:

- A={1,2,3}   B={+,-,*,/}   C={a,b,c,d},
- r={(1,+),(1,*),(2,-),(2,*)}
- s={(+,a),(+, b),(-,a),(-,d),(*,c),(/,d)}
- r·s={(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,d),(2,c)}



Przykład złożenia relacji z sobą samą



Przykład: złożenie funkcji

$f,g: N \to N$ $f(x)=2x+1$ $g(x)=x^2$.

$f=\{(0,1),(1,3),(2,5),\ldots\}$

$g=\{(0,0),(1,1),(2,4),(3,9),\ldots\}$

$(f \bullet g)(x) = g(f(x))=\{(0,1),(1,9),(2,25),\ldots\}$

$(f \bullet g)(x)= (2x+1)^2$

$(g \bullet f)(x)=f(g(x))=\{(0,1),(1,3),(2,9),\ldots\}$

$(g \bullet f)(x)=2x^2+1$

Własności relacji binarnych

- Niech r $\subseteq$ A$\times$A. Powiemy, że relacja r jest
- zwrotna jeśli $\forall x \in A: (x,x) \in r$
- przeciwzwrotna jeśli $\forall x \in A: (x,x) \notin r$
- symetryczna, jeśli $\forall x,y \in A: (x,y) \in r \rightarrow (y,x) \in r$
- asymetryczna, jeśli $\forall x,y \in A: (x,y) \in r \rightarrow (y,x) \notin r$
- antysymetryczna, jeśli $\forall x,y \in A: (x,y) \in r \wedge (y,x) \in r \rightarrow x=y$
- przechodnia, jeśli $\forall x,y,z \in A: (x,y) \in r \wedge (y,z) \in r \rightarrow (x,z) \in r$
- spójna, jeśli $\forall x,y \in A: (x,y) \in r \vee (y,x) \in r \vee x=y$

Alternatywnie:

- Niech $r \subseteq A \times A$. Powiemy, że relacja r jest
- zwrotna, jeśli $id_A \subseteq r$
- przeciwzwrotna, jeśli $id_A \cap r = \emptyset$
- symetryczna, jeśli $r=r^{-1}$
- asymetryczna, jeśli $r \cap r^{-1} = \emptyset$
- antysymetryczna, jeśli $r \cap r^{-1} \subseteq id_A$
- przechodnia, jeśli $r^2 \subseteq r$
- spójna, jeśli $r \cup r^{-1} \cup id_A = A^2$

Jeszcze jedna ważna własność

- Łańcuchem relacji r nazwiemy ciąg elementów zbioru A: $a_1, a_2, a_3, \ldots$ taki, że dla każdych i, dla których ma to sens mamy $(a_i, a_{i+1}) \in r$
  - Czyli w łańcuchu relacji kolejne elementy są ze sobą w relacji. Łańcuch może być skończony lub nieskończony.
- Relację r nazwiemy dobrze ufundowaną, jeśli nie ma nieskończonych łańcuchów.

Przykłady

- Relacja > w zbiorze liczb naturalnych jest dobrze ufundowana.
- Relacja ≥ w zbiorze liczb naturalnych nie jest dobrze ufundowana.
- Relacja > w zbiorze liczb całkowitych nie jest dobrze ufundowana.
- Relacja < w zbiorze liczb naturalnych nie jest dobrze ufundowana.
- Każda relacja w zbiorze skończonym jest dobrze ufundowana, o ile jej graf nie ma cyklu.
- Relacja pusta jest zawsze dobrze ufundowana.

Przykłady relacji, których własności warto rozważyć

- Relacja równoległości prostych na płaszczyźnie $||$
- Relacja prostopadłości prostych na płaszczyźnie $\perp$
- Relacja przystawania modulo 3 w liczbach naturalnych mod3
- Relacja pusta w zbiorze co najmniej dwuelementowym $\emptyset 2$
- Relacja pusta w pustym zbiorze $\emptyset_{\emptyset}$
- Relacja bycia wasalem w systemie lennym WASAL
- Relacja bycia matką wśród ludzi MATKA
- Relacja większości w N $<_N$
- Relacja niewiększości w N $\geq_N$
- Relacja bycia bratem wśród ludzi BRAT
- Relacje przystawania i podobieństwa trójkątów

Własności relacji – przykłady

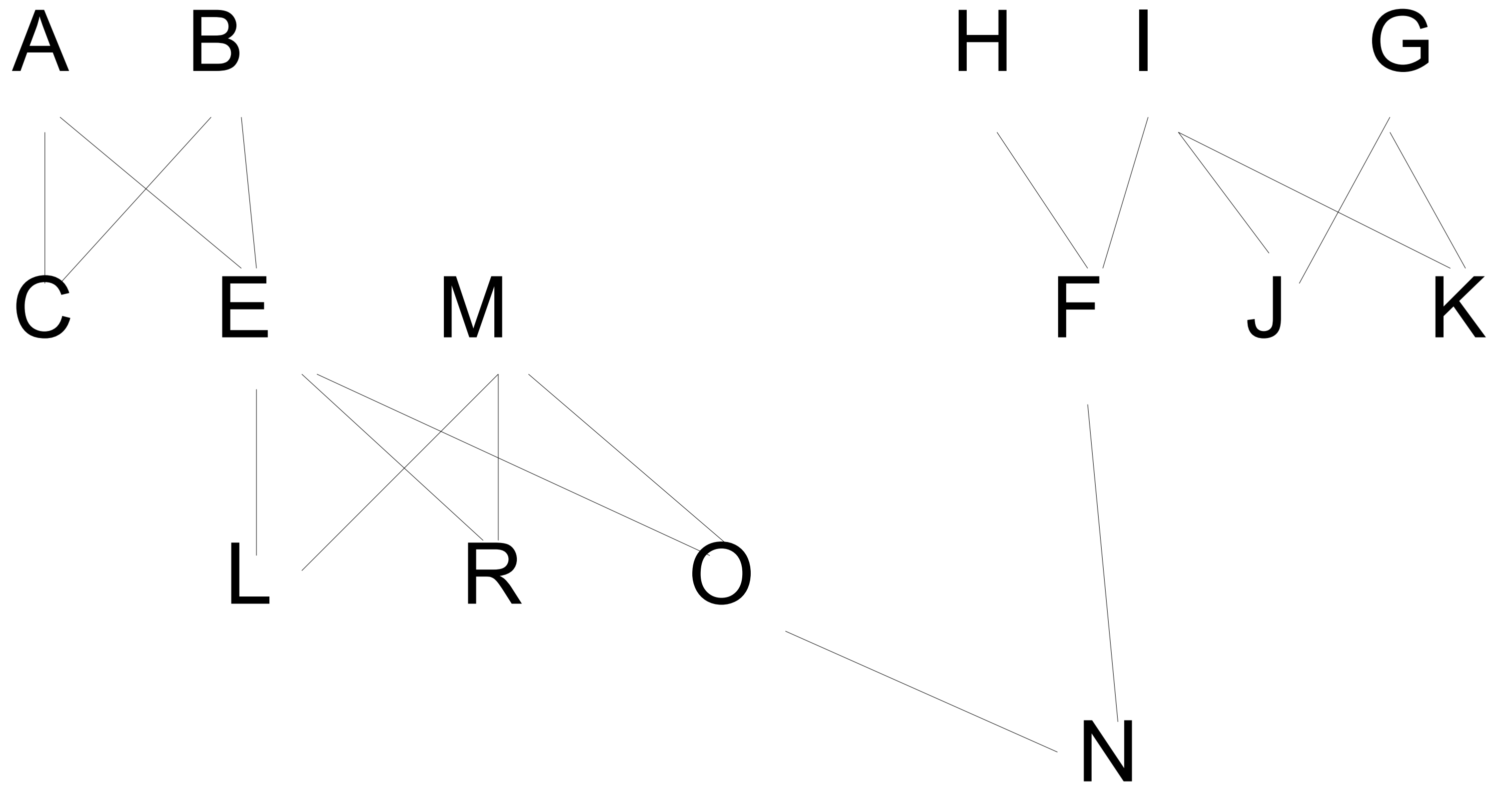
	zwr	p-zwr	sym	asym	antys	przch	spójn	d-uf	
$\parallel$	T	N	T	N	N	T	N	N	
$\perp$	N	T	T	N	N	N	N	N	
mod 3	T	N	T	N	N	T	N	N	
$\varnothing 2$	N	T	T	T	T	T	N	T	
$\varnothing_{\varnothing}$	T	T	T	T	T	T	T	T	
WASAL	N	T	N	T	T	?	N	T	
MATKA	N	T	N	T	T	N	N	T	
$<_N$	N	T	N	T	T	T	T	N	
$\geq_N$	T	N	N	N	T	T	T	N	
BRAT	N	T	N	N	N	N	N	N	

Relacje rodzinne

A Anna
B Bernard
C Czesław
D Dariusz
E Elżbieta
F Filip
G Grzegorz
H Henryk
I Irena

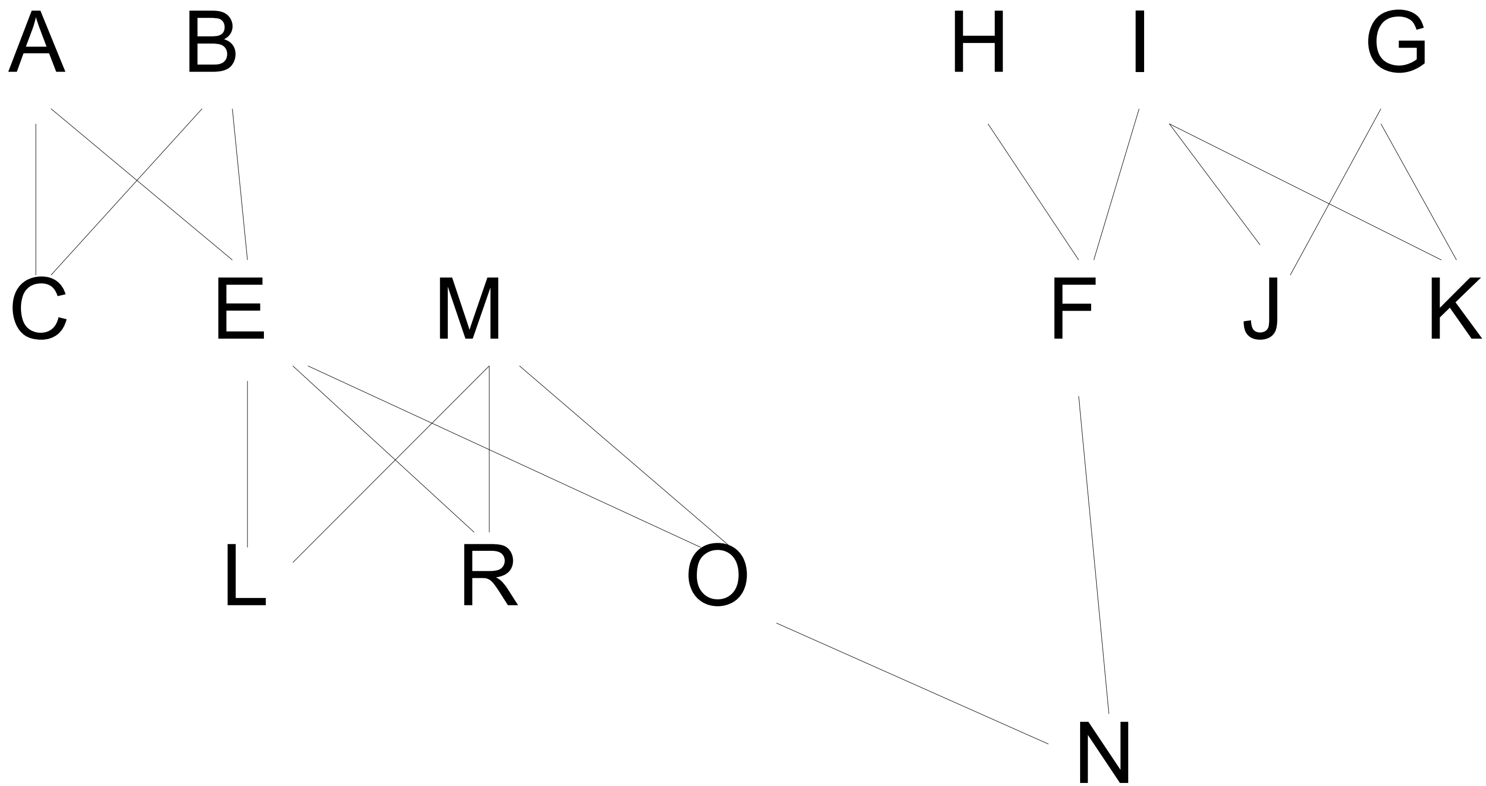
J Jan
K Krzysztof
L Leon
M Marek
N Norbert
O Olga
R Robert

Przykładowa rodzina



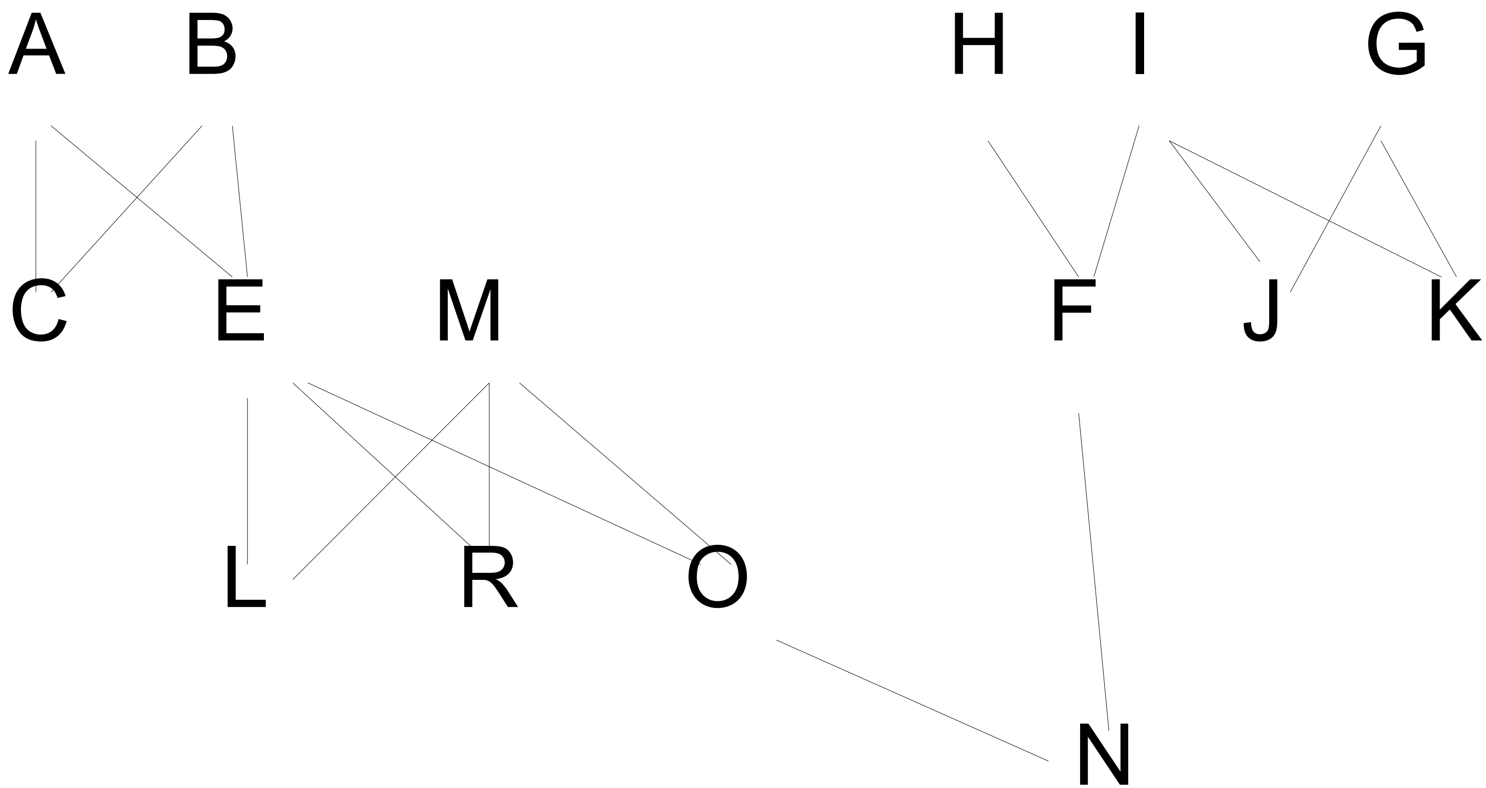
MATKA={(C,A),(E,A),(F,I),(J,I),(K,I),(L,E),(R,E),(O,E),(N,O)}

Przykładowa rodzina



OJCIEC={(C,B),(E,B),(F,H),(J,G),(K,G),(L,M),
(R,M),(O,M),(N,F)}

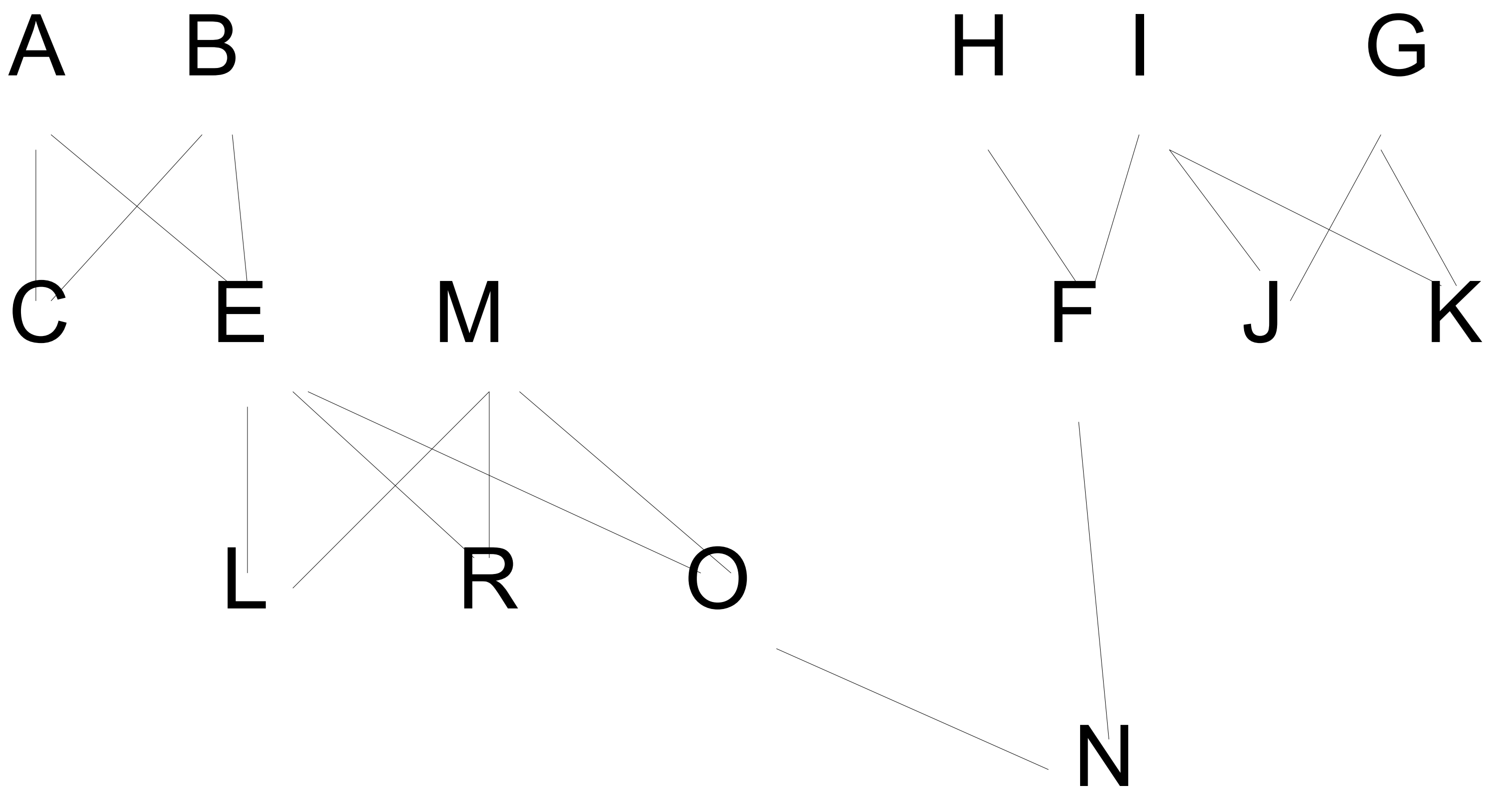
Przykładowa rodzina



MĄŻ={(A,B),(I,H),(I,G),(E,M),(O,F)}

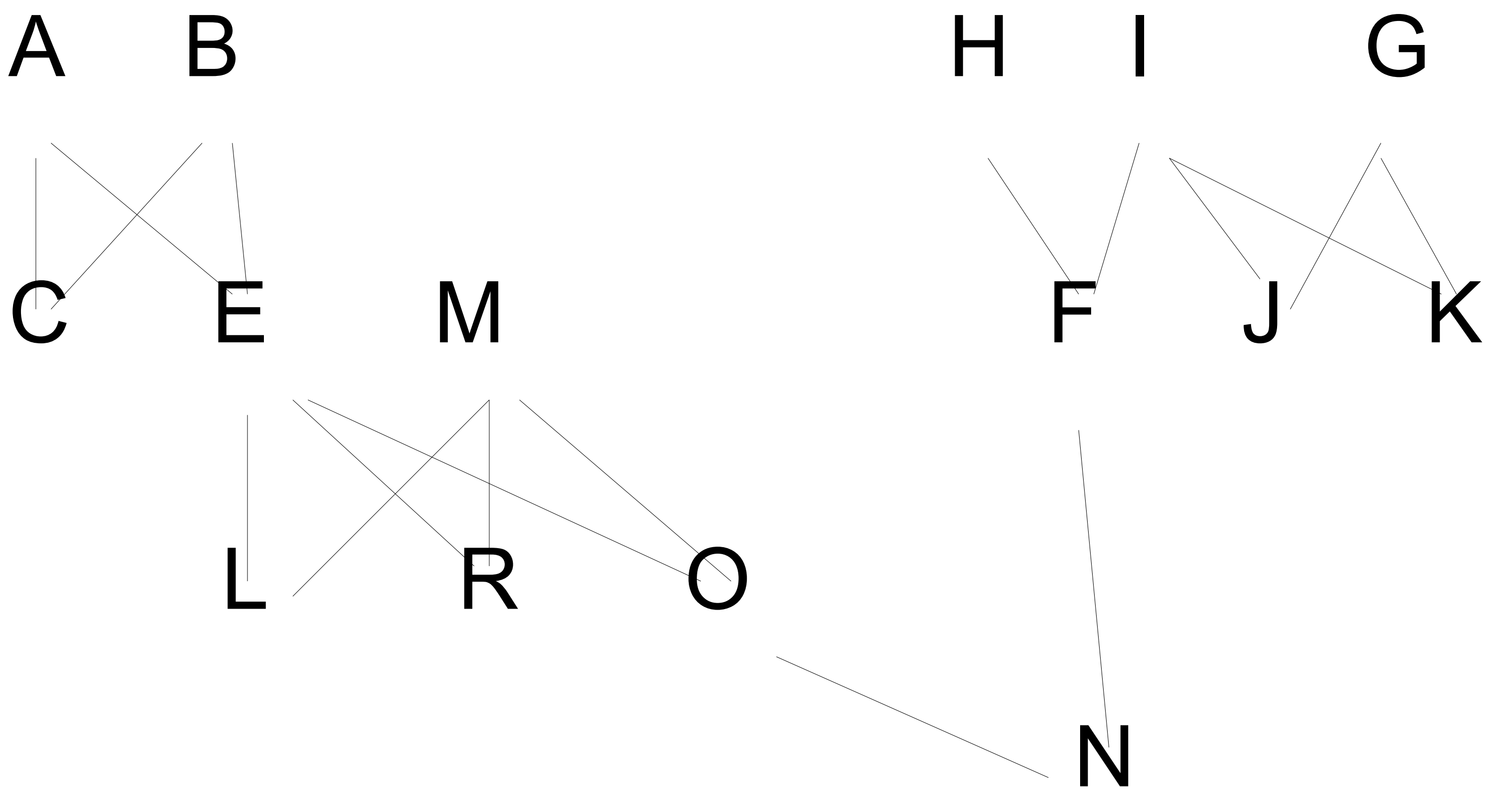
ŻONA=MĄŻ$^{-1}$={(B,A),(H,I),(G,I),(M,E),(F,O)}

Przykładowa rodzina



RODZIC=OJCIEC $\cup$ MATKA ,
DZIECKO=RODZIC^{-1}

Przykładowa rodzina



BABCIA = RODZIC · MATKA = {(L,A),(R,A),
(O,A),(N,E),(N,I)}

Filtry

Podzbiory identyczności mogą służyć jako filtry

Np. ONE={(A,A),(E,E),(I,I),(O,O)}

Wtedy złożenie dowolnej relacji r z relacją ONE powoduje wycięcie tych par, które nie mają kobiety jako drugiego argumentu.

Np. DZIECKO • ONE = CÓRKA

Ale ONE • DZIECKO = dzieci kobiet

Przykłady

SZWAGIER = ŻONA • BRAT ∪ MĄŻ • BRAT ∪ SIOSTRA • MĄŻ

JĄTREW = MĄŻ • BRAT • ŻONA

CIOTKA = RODZIC • SIOSTRA

WUJENKA = WUJ • ŻONA \ CIOTKA

WUJ = MATKA • BRAT ∪ CIOTKA • MĄŻ

STRYJ = OJCIEC • BRAT

SYNOWIEC = (BRATANEK) = BRAT • SYN

Przykłady

KUZYN = (BABCIA $\cup$ DZIADEK) $\bullet$ WNUK \ BRAT \ SIOSTRA \ ID =

= (CIOTKA $\cup$ WUJ $\cup$ STRYJ) $\bullet$ SYN

SYN=DZIECKO $\bullet$ ONI

WNUK = (BABCIA $\cup$ DZIADEK)$^{-1}$ $\bullet$ ONI

ONI = ID \ ONE

Domknięcia relacji

Domknięcie zwrotne relacji R, to najmniejsza relacja zawierająca R, która jest zwrotna.

$R^z = R \cup ID$

Domknięcie symetryczne relacji R, to najmniejsza relacja zawierająca R, która jest symetryczna

$R^s = R \cup R^{-1}$

Domknięcie przechodnie relacji R, to najmniejsza relacja zawierająca R, która jest przechodnia

R^+

Domknięcia relacji

Potęgowanie relacji:

Dla dowolnej relacji R definiujemy R^0=ID.

Dla n>0 definiujemy $R^n = R \bullet R^{n-1}$

dodatkowo przez R^* oznaczamy nieskończoną sumę

$R^0 \cup R^1 \cup R^2 \ldots$

dodatkowo przez R^+ oznaczamy nieskończoną sumę

$R^1 \cup R^2 \ldots$

Zauważmy, że R^*, to domknięcie zwrotne i przechodnie relacji R, a R^+ to domknięcie przechodnie relacji R.

PRZODEK I POTOMEK

$PRZODEK = RODZIC^{+}$

$POTOMEK = PRZODEK^{-1}$

$KREWNY = PRZODEK \bullet POTOMEK$

<Mistrzostwa w Algorytmice i Programowaniu>

Projekt „Mistrzostwa w Algorytmice i Programowaniu – Uczniowie” jest finansowany ze środków pochodzących z „Programu Rozwoju Talentów Informatycznych na lata 2019-2029”

Dofinansowanie Projektu: 4.887.850,50 zł

Całkowita wartość Projektu: 5.460.850,50 zł

GOV.pl CYFRYZACJA

KPRM