MAP
<Mistrzostwa w Algorytmice i Programowaniu>
MATEMATYKA W KONKURSACH
ALGORYTMICZNO-PROGRAMISTYCZNYCH
Webinarium przeprowadzone w ramach projektu "Mistrzostwa w Algorytmice i Programowaniu - Uczniowie", finansowanego przez:
GOV.pl CYFRYZACJA
KPRM
OTWARTY WEB-KURS

Piotr Chrząstowski-Wachtel
Uniwersytet Warszawski

Kombinatoryka (2)

Czy da się znaleźć wzór na liczby Fibonacciego?

Tak, ale tu trzeba trochę pomęczyć.

Mamy równanie postaci

$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$

Jest to równanie z klasy równań homogenicznych, czyli takich, gdzie n-ty wyraz zależy liniowo jedynie od stałej liczby wyrazów poprzednich, jest więc postaci

$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+...+c_ra_{n-r}$ (tu $r=2$, $c_1=c_2=1$)

Twierdzenie

Niech $a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+...+c_ra_{n-r}$ będzie homogeniczną rekurencją liniową i niech ciągi b_n oraz b_n' spełniają tę rekurencję

wtedy ciągi b_n+b_n' oraz αb_n dla dowolnej stałej α też spełniają tę rekurencję.

Zatem jeśli znajdziemy jakieś rozwiązania danej rekurencji, to dowolna kombinacja liniowa tych rozwiązań też będzie rozwiązaniem tej rekurencji.

Ogólna metoda

Mając daną zależność rekurencyjną

$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+...+c_ra_{n-r}$

próbujemy znaleźć rozwiązania postaci $a_j=x^j$.

$x^n=c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+...+c_rx^{n-r}$, czyli

$x^n-c_1x^{n-1}-c_2x^{n-2}-...-c_rx^{n-r} =0$, czyli

$x^r-c_1x^{r-1}-c_2x^{r-2}-...-c_r =0$

(podzieliliśmy obie strony przez x^{n-r})

Równanie charakterystyczne

Otrzymane równanie

$x^r - c_1 x^{r-1} - c_2 x^{r-2} - \ldots - c_r = 0$

nazywa się równaniem charakterystycznym danej rekurencji.

Pierwiastki tego równania są dobrymi kandydatami na rozwiązanie rekurencji.

Po wyznaczeniu pierwiastków za pomocą warunków początkowych określamy stałe, które występują przy kolejnych potęgach pierwiastków.

Lemat

Jeśli x_1 i x_2 są różnymi pierwiastkami równania

$$x^2=Ax+B,$$

to równanie rekurencyjne

$$a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}$$

ma rozwiązanie postaci

$$a_n=c_1x_1^n + c_2x_2^n$$

Zastosujmy ten lemat do liczb Fibonacciego

Ponieważ $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$, więc A=B=1 i nasze równanie przyjmuje postać $x^2=x+1$,

a pierwiastkami tego równania są liczby $\varphi=(1+\sqrt{5})/2$ oraz $\psi=(1-\sqrt{5})/2$, zatem

równanie rekurencyjne

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

ma rozwiązanie postaci

$$F_n=c_1\varphi^n + c_2\psi^n$$

dla pewnych stałych c_1,c_2.

Wyznaczamy stałe c1 i c2

Stałe c1 i c2 wyznaczymy z warunków początkowych. Wiemy bowiem, że F0=0 i F1=1, więc wystarczy podstawić n=0, żeby otrzymać jedno równanie, a potem n=1, żeby otrzymać drugie równanie z dwiema niewiadomymi.

Mamy więc $F_0=c_1\varphi^0 + c_2\psi^0$, czyli $0=c_1 + c_2$ oraz

$F_1=c_1\varphi^1 + c_2\psi^1$, czyli $1=c_1\varphi+ c_2\psi$

Rozwiązując ten układ równań dostajemy $c1=1/\sqrt{5}$ i $c2=-1/\sqrt{5}$

Zatem ostatecznie $F_n=(1/\sqrt{5})(\varphi^n - \psi^n)$.

Interesujące zadanie.

- Piraci mają skarb – 100 dukatów. Muszą go podzielić między sobą.
- Postanowili ustalić takie reguły.

Reguły piratów

1.Najpierw urządza się konkurs siły “na rękę” ustalając hierarchię od najsilniejszego do najsłabszego.

2. Najsilniejszy proponuje sposób podziału

3. Piraci głosują za propozycją. Jeśli proponent uzyska 50%, jest ona ostateczna. Jeśli nie, to proponent jest wyrzucany za burtę – a w morzu roi się od rekinów – w tym przypadku do głosu dochodzi następny pod względem siły i powtarzamy punkty 2 i 3. Aż do skutku.

Priorytety piratów

1.Przede wszystkim chodzi o to, żeby przeżyć, czyli żeby propozycja została zaakceptowana.

2. W ramach propozycji, które zapewniają przeżycie wybieramy tę, która maksymalizuje zysk proponenta

3. Przy głosowaniu, jeśli obie możliwości dają głosującemu tyle samo, to głosuje na NIE (piraci mają zadawnione zadry i chcą pozbyć się nielubianych kamratów).

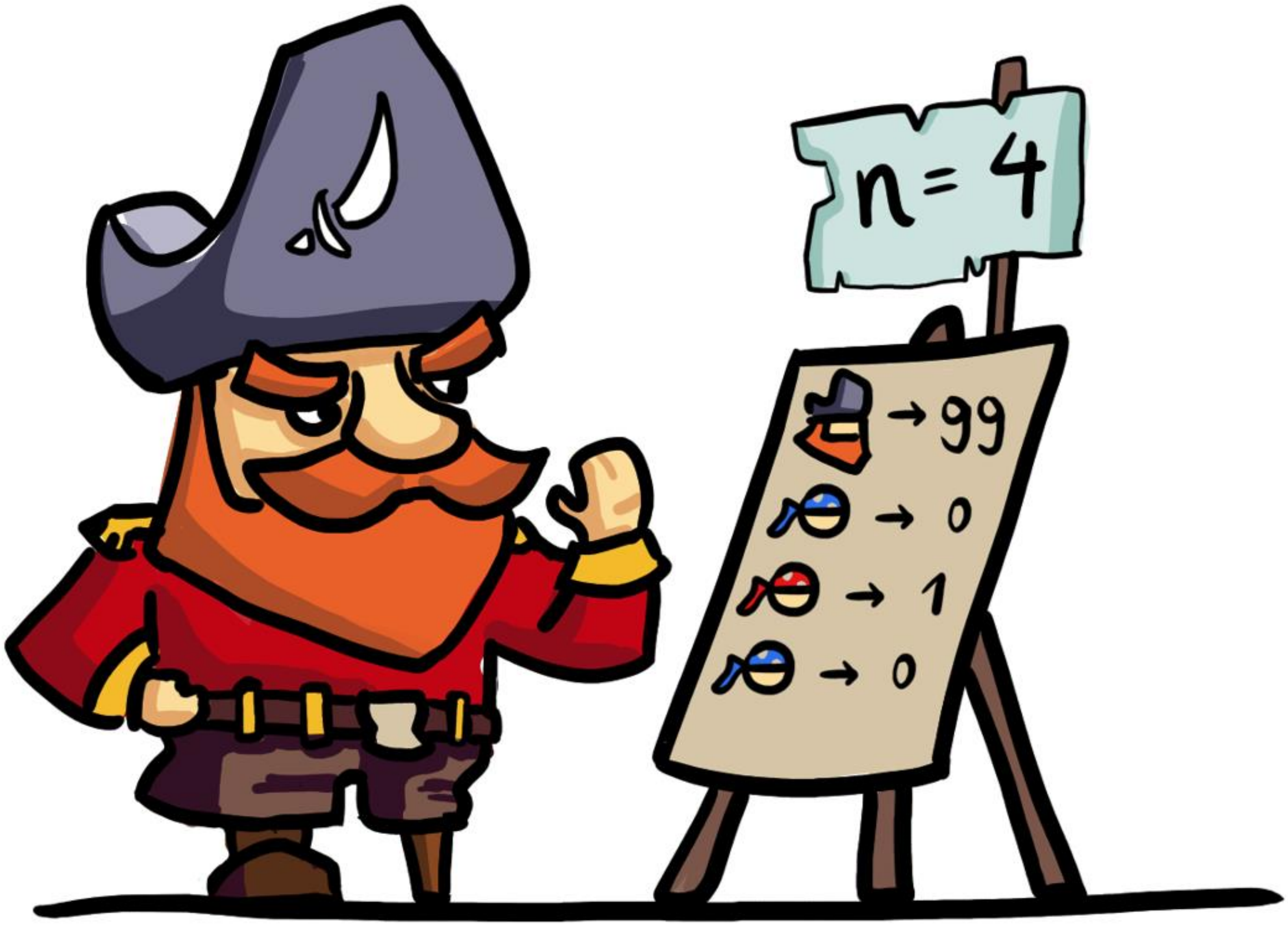
Czy to wystarczy, żeby ustalić strategię proponenta?

- Okazuje się, że tak! Wszystkie dane do rozwiązania zadania już mamy.
- Oczywiście strategia zależy od liczby piratów.
- Zaczniemy od małych liczb. Niech n będzie liczbą piratów.

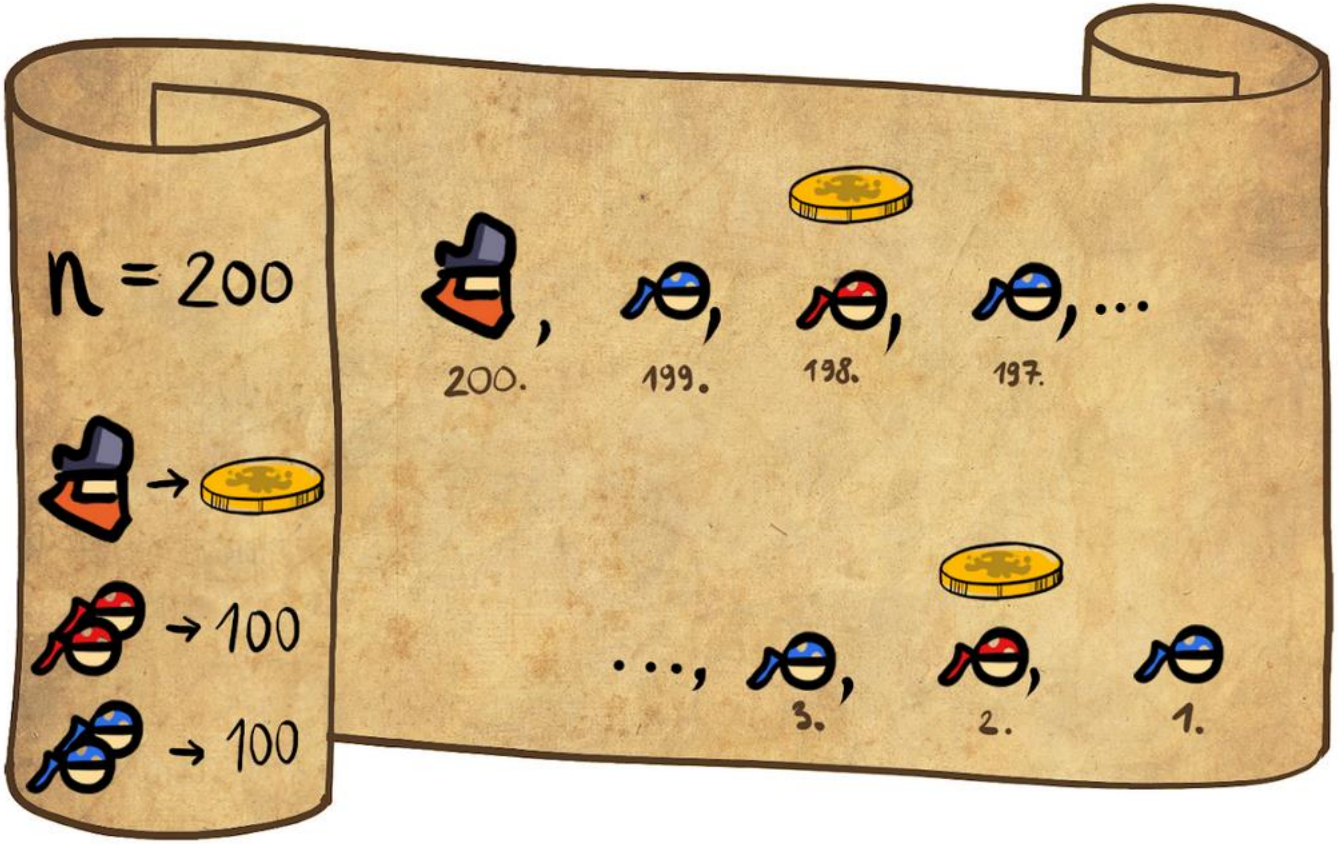

n = 1
→ 100

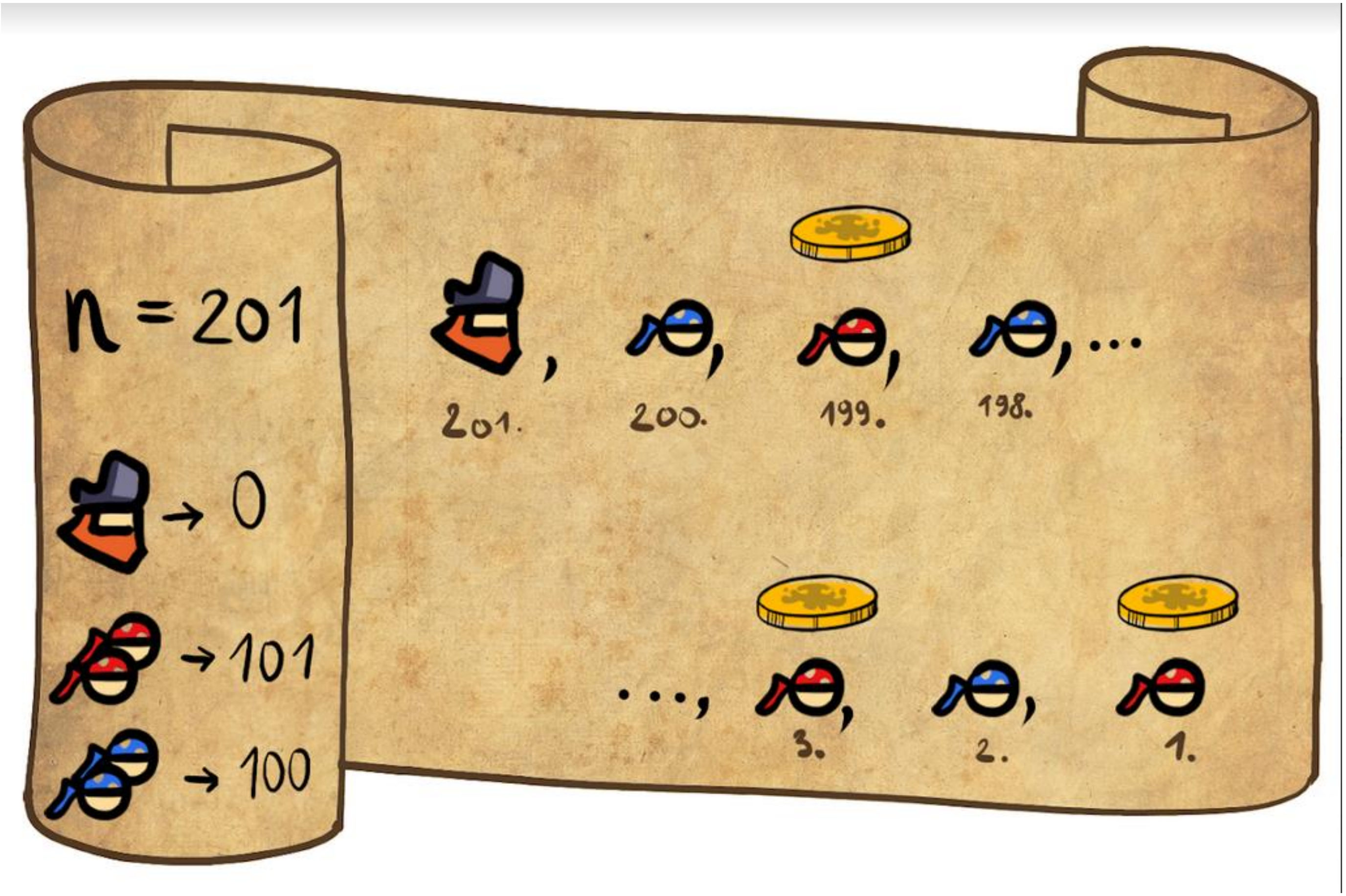

n = 2
→ 100
→ 0


n = 3
→ 99
→ 0
→ 1

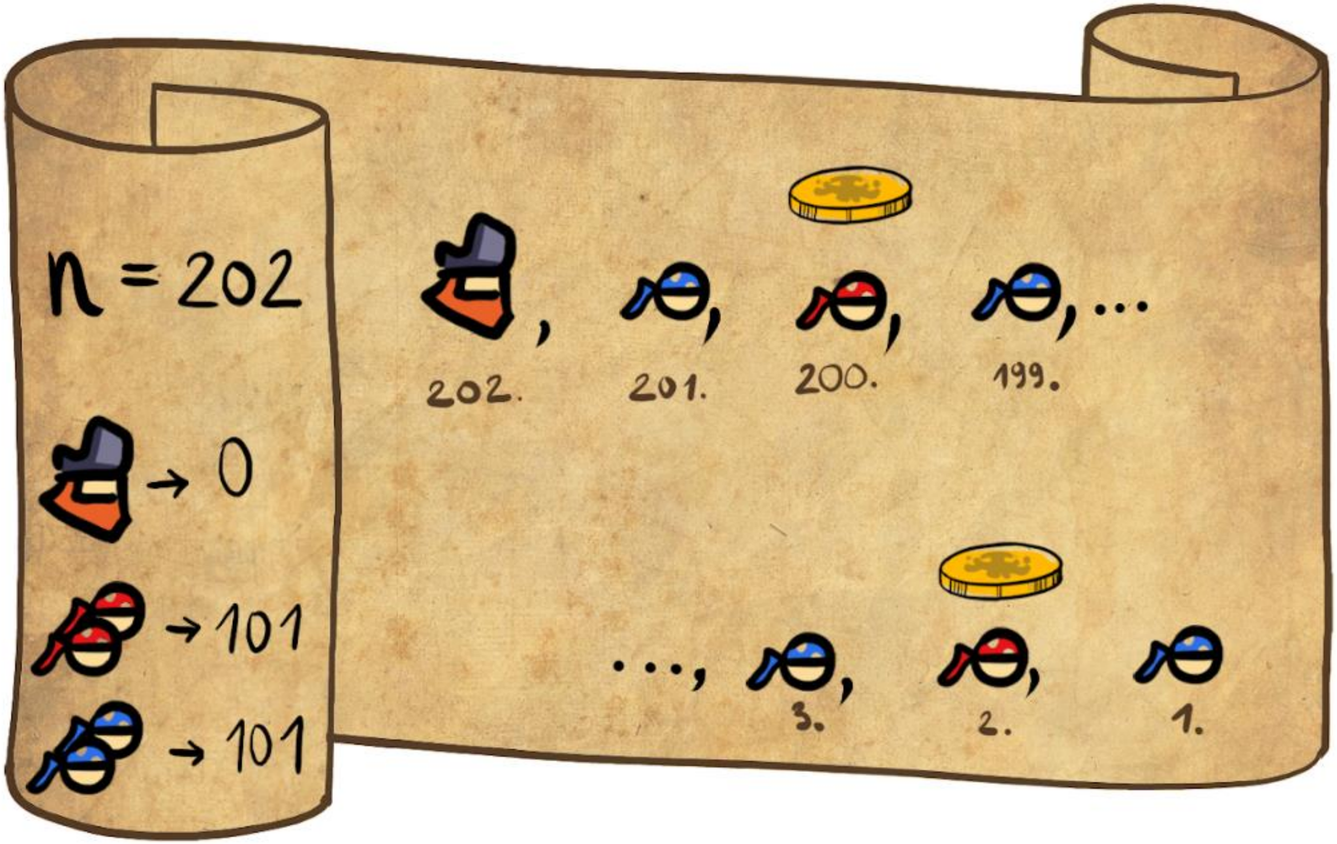

n = 4
→ 99
→ 0
→ 1
→ 0

n = 5
→ 98
→ 0
→ 1
→ 0
→ 1

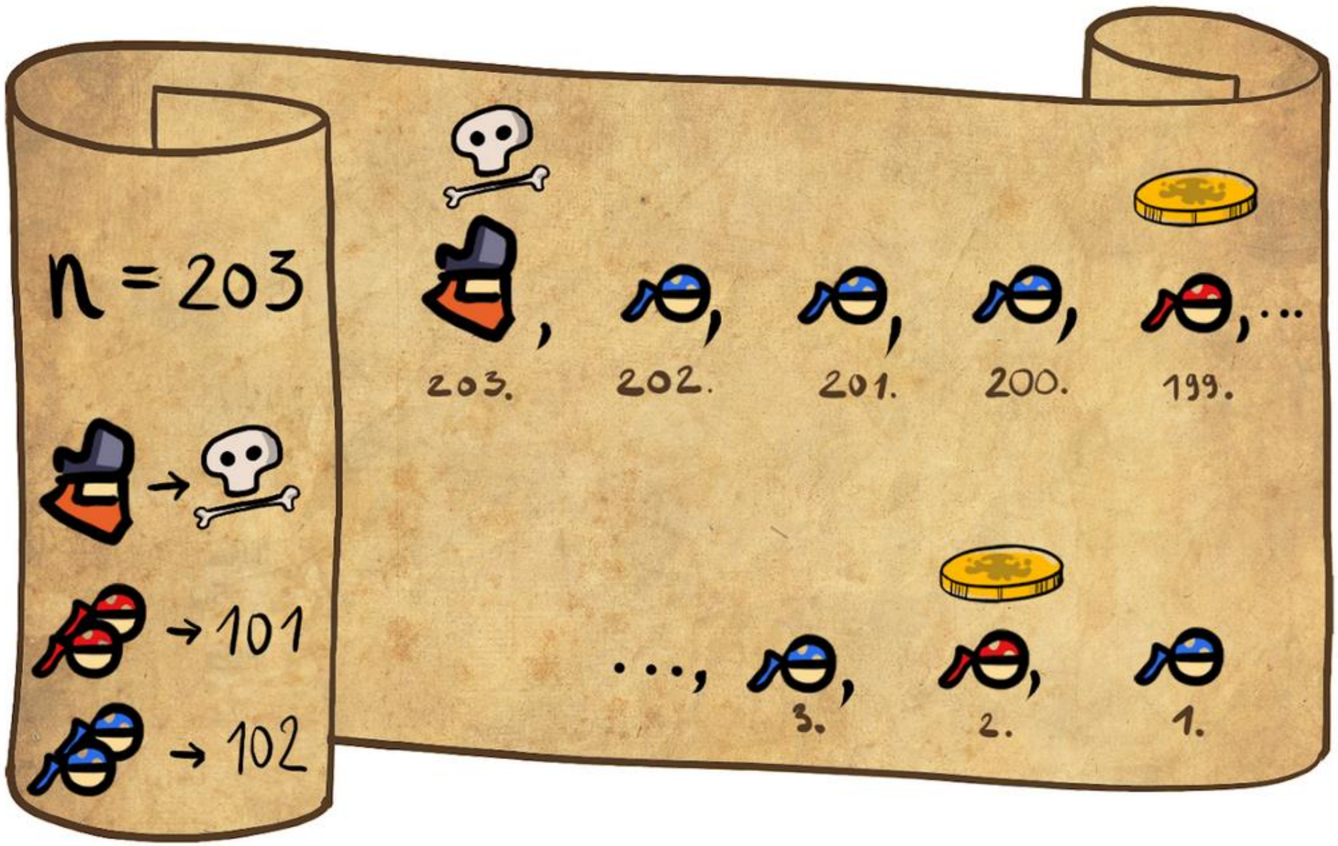

n = 200
→ 100
→ 100
200.
199.
198.
197.
3.
2.
1.



n = 201
→ 0
→ 101
→ 100
201.
200.
199.
198.
3.
2.
1.

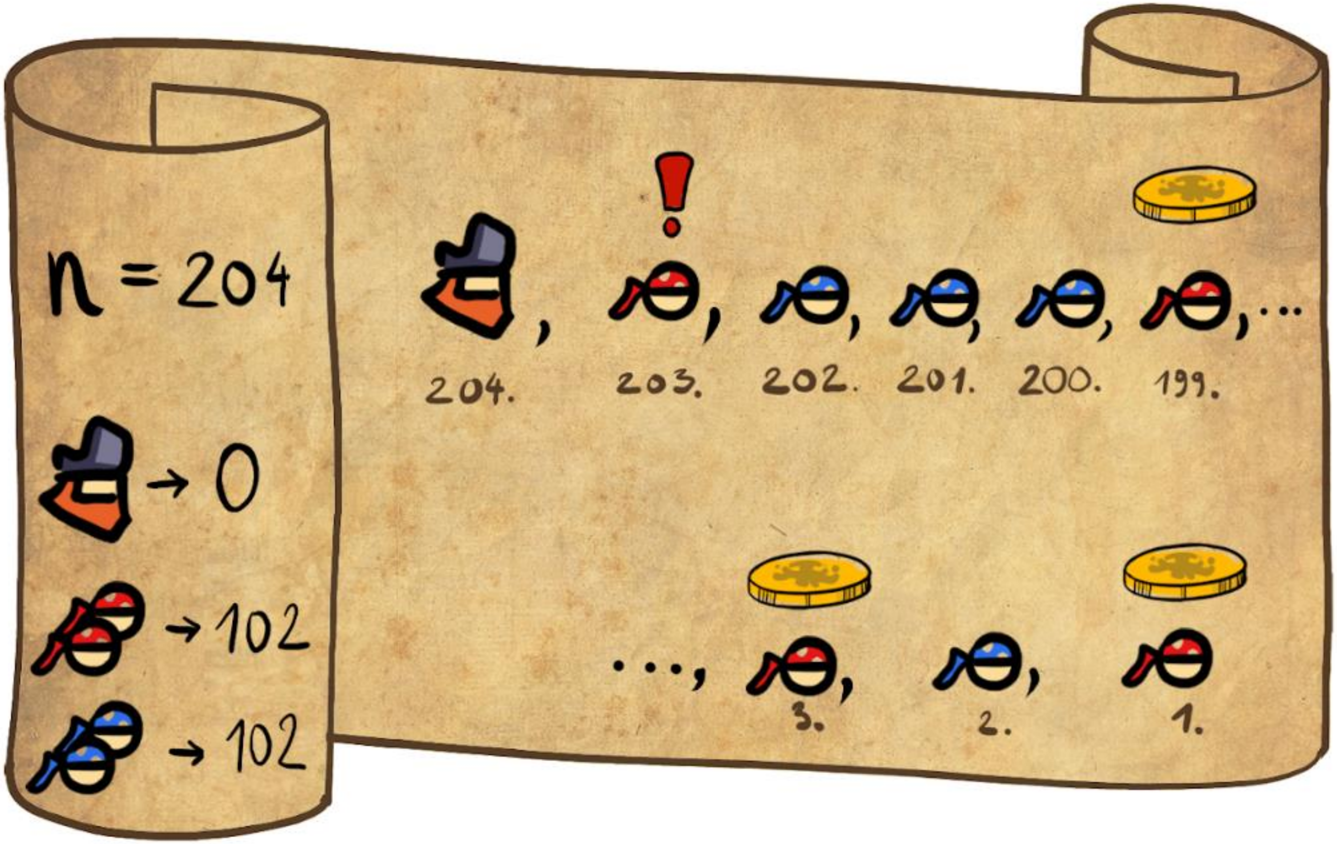


n = 202
→ 0
→ 101
→ 101
202.
201.
200.
199.
3.
2.
1.

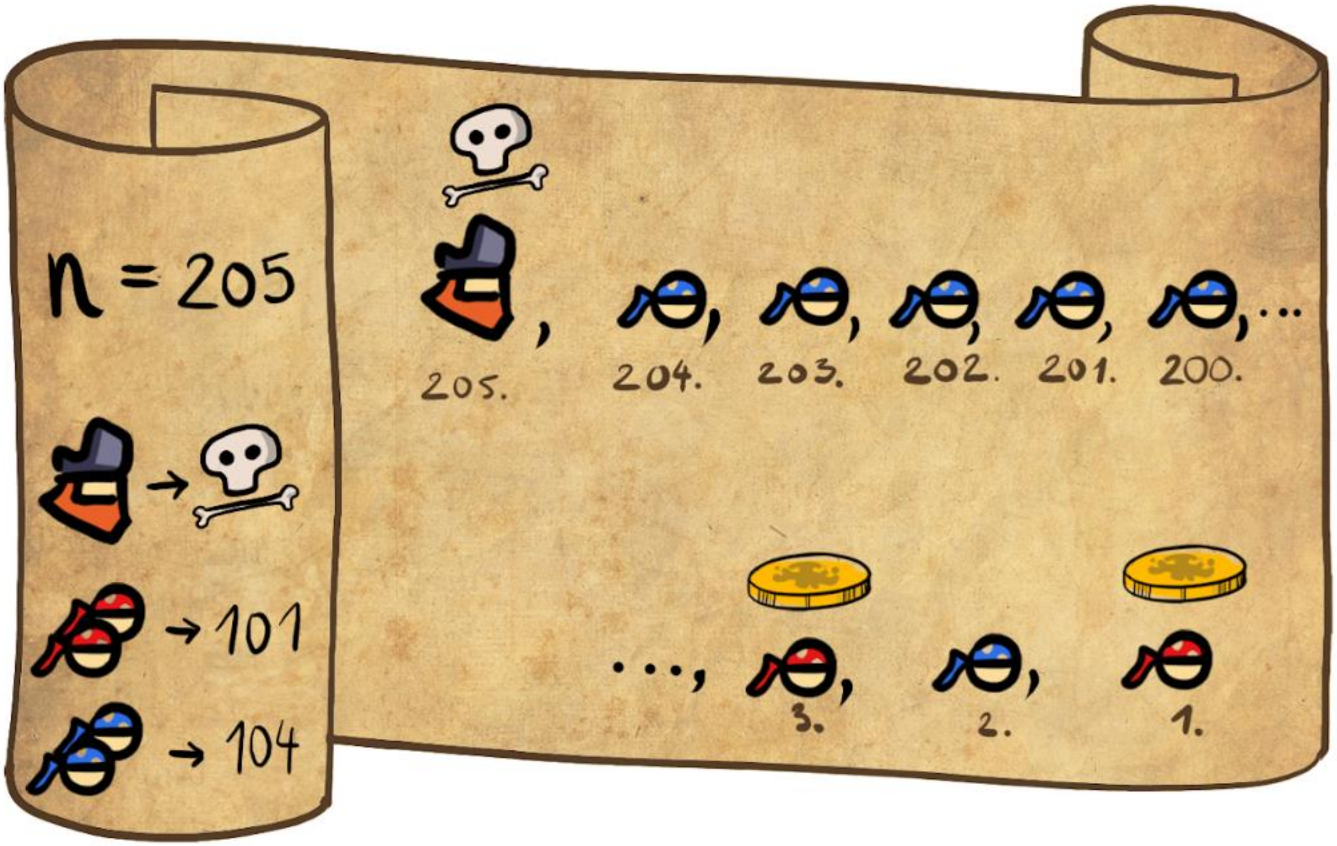


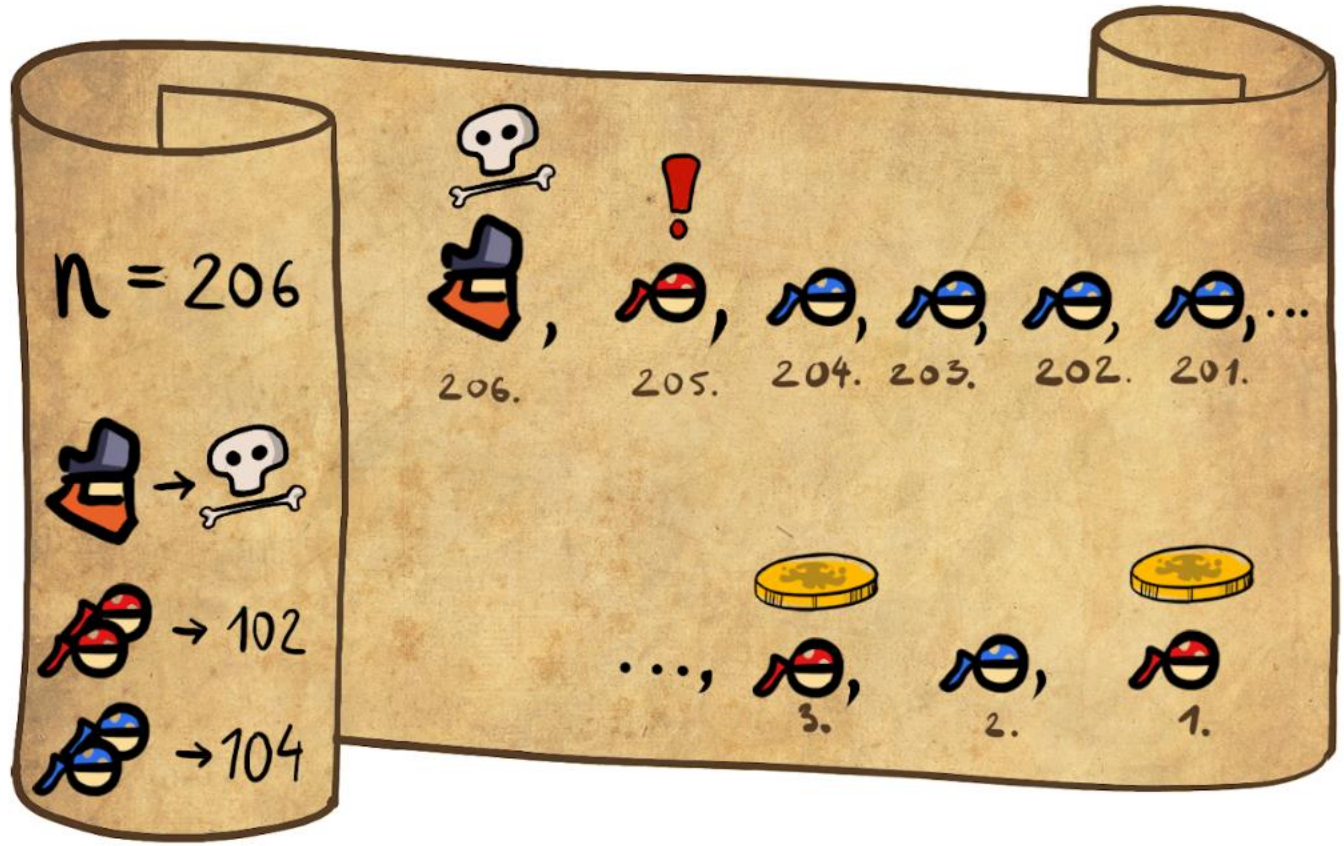
n = 203
→ 101
→ 102
203.
202.
201.
200.
199.
3.
2.
1.

n=203

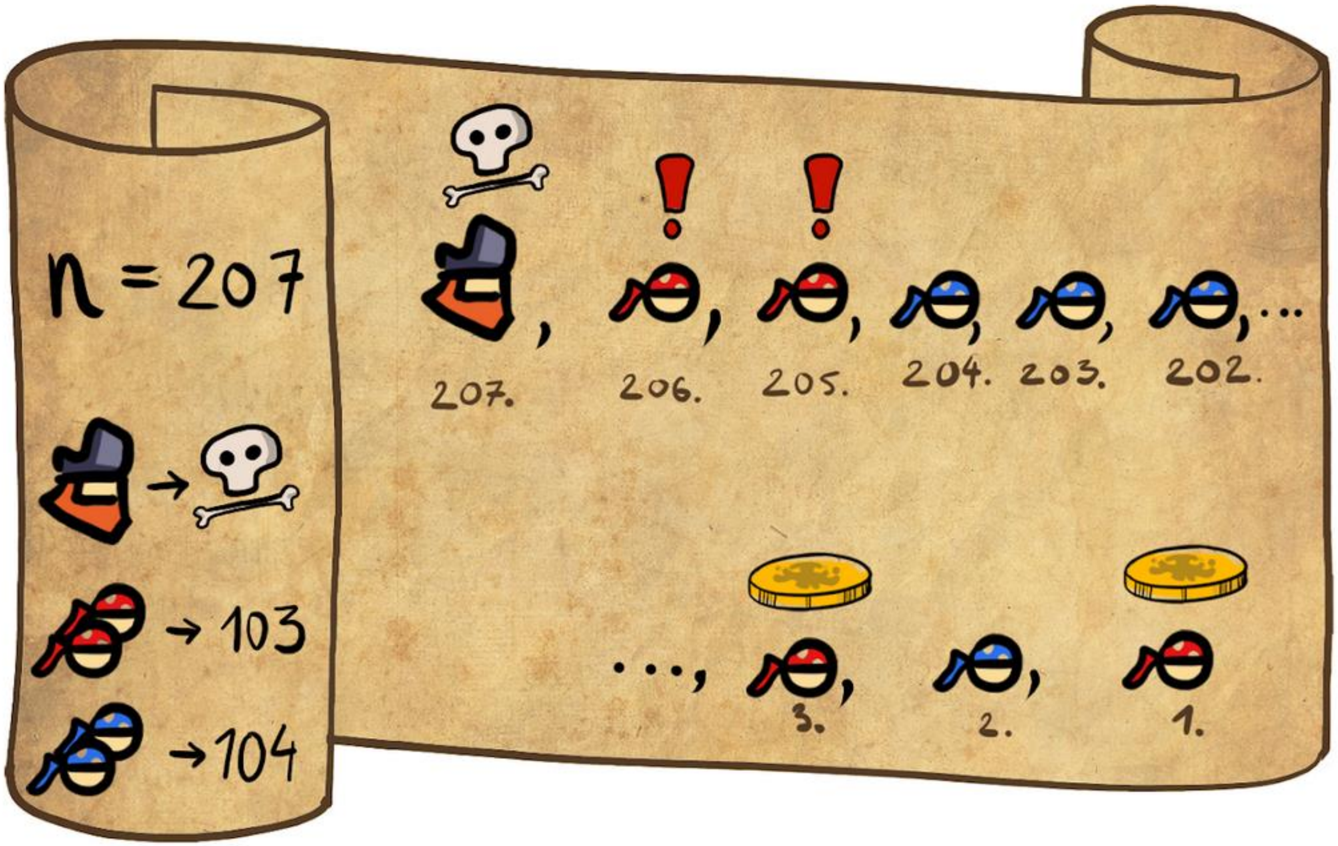


n = 204
→ 0
→ 102
→ 102
204.
203.
202.
201.
200.
199.
3.
2.
1.

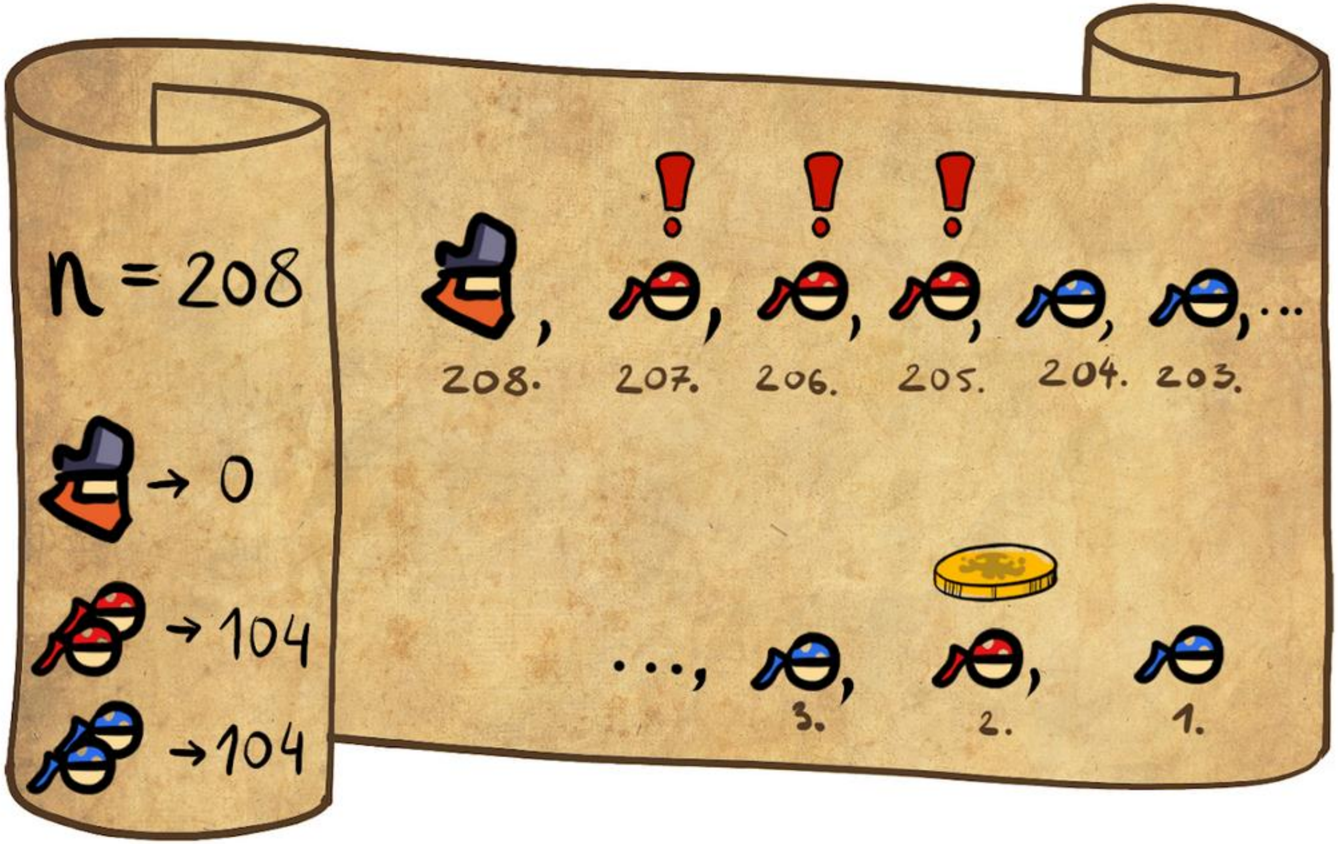

n = 205
→ 101
→ 104
205.
204.
203.
202.
201.
200.
3.
2.
1.



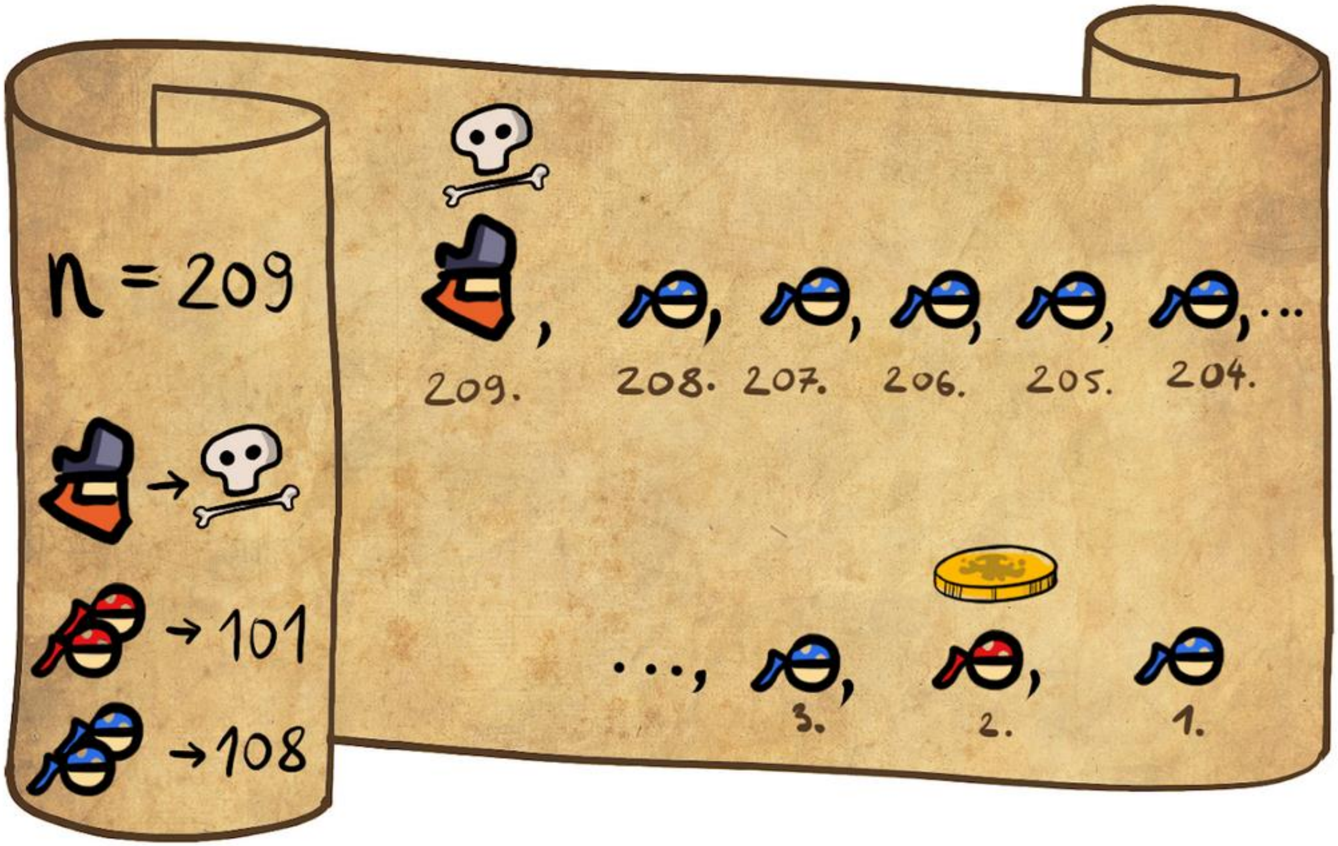
n = 206
→ 102
→ 104
206.
205.
204.
203.
202.
201.
3.
2.
1.



n = 207
→ 103
→ 104
207.
206.
205.
204.
203.
202.
3.
2.
1.



n = 208
→ 0
→ 104
→ 104
208.
207.
206.
205.
204.
203.
3.
2.
1.



n = 209
→101
→108
209.
208.
207.
206.
205.
204.
…,
3.
2.
1.

Ogólny schemat:

Jeśli $n<203$, to musisz rozdać po jednym dukacie tym piratom, którzy mają tę samą parzystość co Ty, poczynając od najsłabszego , a kończąc na tym, którego numer jest wciąż mniejszy, niż Twój. Resztę dukatów bierzesz dla siebie.

Ogólny schemat:

Jeśli n>202, i nie jest postaci $200+2^k$ dla pewnego k, to sorry, ale czeka Cię kąpiel z rekinami niezależnie od tego, co zaproponujesz.

Jeśli jednak $n=200+2^k$ dla pewnego k, to jeśli k jest parzyste, to rozdajesz dukaty (po jednym) piratom 1,3,5,…,199, zaś jeśli k jest nieparzyste, to rozdajesz je piratom 2,4,6,...200.

Na ile sposobów można podzielić zbiór n-elementowy na rozłączne podzbiory?

Klasyczny problem kombinatoryczny.

Użyjemy podobnej metody – zaczniemy od małych wartości n, żeby rozpoznać o co chodzi i spróbujemy odnieść wyniki dla większych wartości w odniesieniu do mniejszych.

Zacznijmy od nazwania

Oznaczmy liczbę możliwych podziałów n-elementowego zbioru na niepuste podzbiory przez B(n).

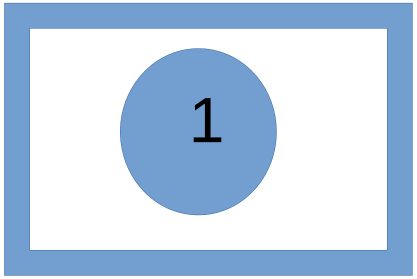
$n=0$

Przypadek sprawiający czasami kłopot.

Przyjmijmy $B(0)=1$.

Jest to pusty podział. Oczywiście jedyny.

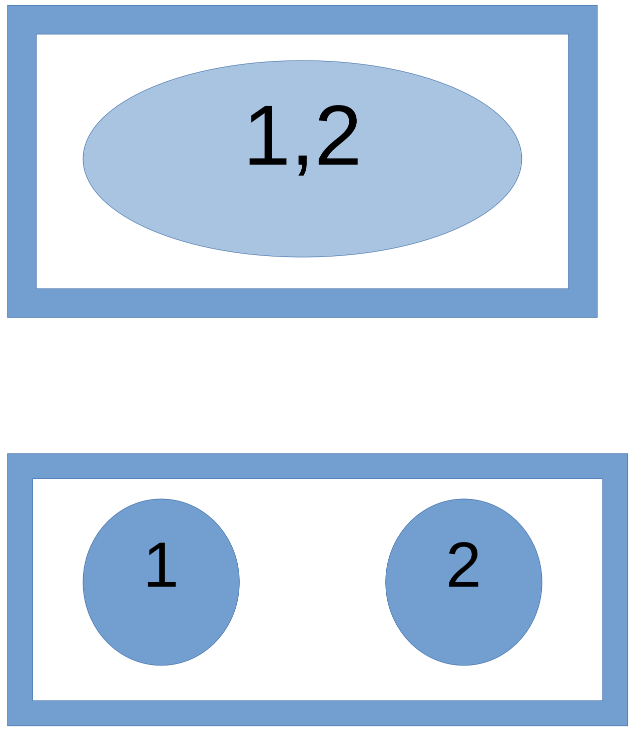
n=1



A={1}

B(1)=1

n=2

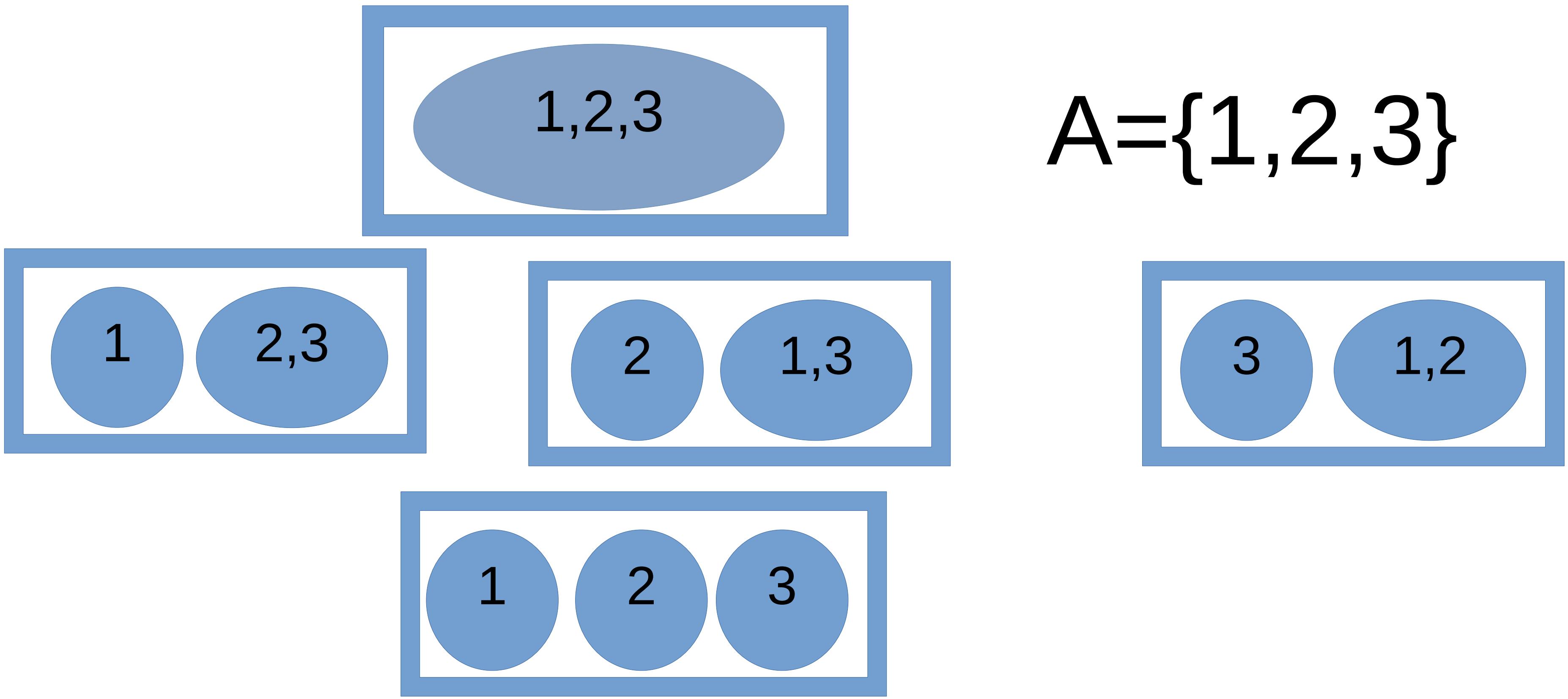


A={1,2}

B(2)=2

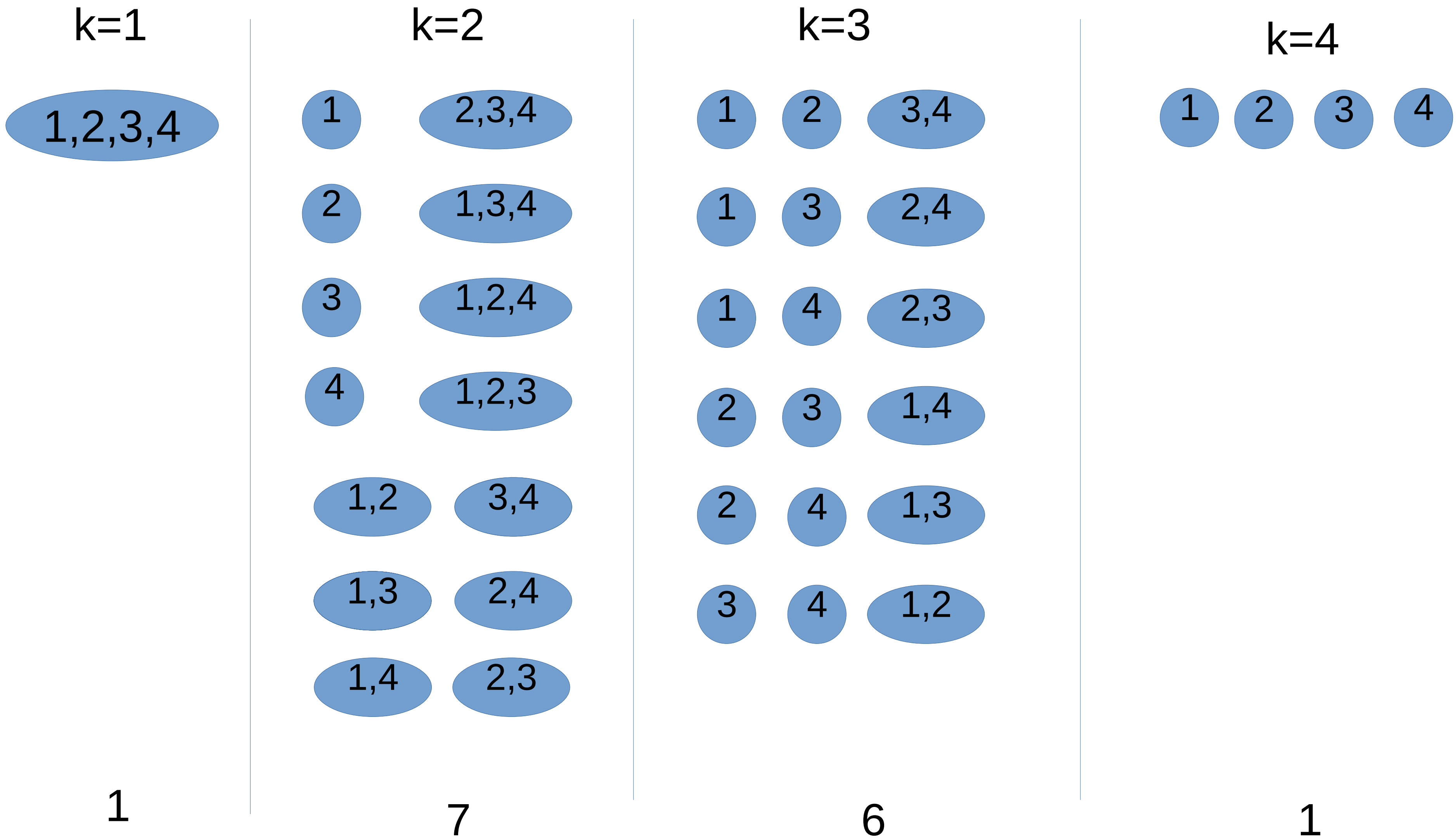
n=3

$A=\{1,2,3\}$



$B(3)=5$

$n=4 \quad A=\{1,2,3,4\}$



$B(4)=1+7+6+1=15$

Liczby Stirlinga drugiego rodzaju

Definiujemy $S(n ,k)$, jako liczbę podziałów zbioru n-elementowego na k rozłącznych niepustych bloków.

Na poprzednim slajdzie mieliśmy

- $S(4,1)=1$
- $S(4,2)=7$
- $S(4,3)=6$
- $S(4,4)=1$

Mamy także $B(n)=S(n,1)+S(n,2)+...+S(n,n)$ dla każdego n.

Pomysł!

Rozwiążmy nieco prostszy problem wyznaczenia liczb Stirlinga drugiego rodzaju $S(n,k)$ dla każdych (n,k) i wysumujmy wyniki względem k, żeby otrzymać $B(n)$.

Co możemy od razu powiedzieć o S(n,k)?

- $S(0,0) = 1$
- $S(n,0)=0$ dla $n>0$
- $S(n,1)=1$
  - $S(n,2)=2^{n-1}-1$
- $S(n,n)=1$
  - $S(n,k)=0$ dla $k>n$ lub $k<0$

A najważniejsze, to rekursja

Załóżmy, że n>0 i nasz problem wyznaczenia S(n,k) jest rozwiązany dla wszystkich zbiorów o mocy równej n-1.

Wkładamy element n-ty do naszego zbioru, który ma n-1 elementów i próbujemy wyznaczyć liczbę S(n,k).

Są dwa przypadki.

Przypadek pierwszy

Nasz nowy element utworzy nowy jednoelementowy zbiór – wtedy może on być sparowany z dowolnym z naszych układów S(n-1,k-1), bo powstaje nowy k-ty zbiór.

Przypadek drugi

Nasz nowy element trafi do jednego z istniejących k podzbiorów, na które był podzielony nasz (n-1)-elementowy zbiór. Takich opcji jest k, więc dostaniemy łącznie $k \cdot S(n-1,k)$ możliwości.

Ostatecznie

Dla $0<k\leq n$ mamy

$$S(n,k)=S(n-1,k-1)+ k\cdot S(n-1,k) .$$

Tabela Stirlinga

n	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	k=7	k=8	k=9	
0	1										
1	0	1									
2	0	1	1								
3	0	1	3	1							
4	0	1	7	6	1						
5	0	1	15	25	10	1					
6	0	1	31	90	65	15	1				
7	0	1	63	301	350	140	21	1			
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	

Tabela Stirlinga

n	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	k=7	k=8	k=9	B(n)
0	1										1
1	0	1									1
2	0	1	1								2
3	0	1	3	1							5
4	0	1	7	6	1						15
5	0	1	15	25	10	1					52
6	0	1	31	90	65	15	1				203
7	0	1	63	301	350	140	21	1			877
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1		4030
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	21147

Wzór Dobińskiego

Mało jest wzorów w matematyce nazwanych od nazwisk polskich autorów.

Tu mamy o tyle ciekawą sytuację, że nikt prawie nie wie, kto to był Dobiński, a nawet jak się dokładnie nazywał.

Donald Knuth nawet wyznaczył nagrodę dla pierwszej osoby, która poda mu jego imię.

Co dziś wiemy o nim?

Donald Gabriel Dobiński urodził się w połowie XIX wieku w Starej Wsi, 4 km od Kutna. Jego żoną była Karolina Kruszyńska p.v. Tintz. Pracował na kolei Warszawsko-Bydgoskiej i opracował "Bezpieczny system dla kolei na modłę układu o zapobieganiu zderzeniom na morzu". Wszystkie swoje listy i prace podpisywał G. Dobiński.

Obserwacja wartości pewnego szeregu

Rozważamy nieskończoną sumę postaci

$0^0/0! + 1^0/1! + 2^0/2! + 3^0/3! + 4^0/4! + \ldots =$

$1 \;+\; 1 \;+ 1/2! \;+ 1/3! \;+ 1/4! \;+ \ldots = e$

Obserwacja wartości pewnego szeregu

Co by było gdyby zamiast zer w potęgach były jedynki?

$0^1/0! + 1^1/1! + 2^1/2! + 3^1/3! + 4^1/4! \ldots =$

$0 \quad + \quad 1 \quad + \quad 1 \quad + 1/2! \quad + 1/3! \ldots = e$

To samo!

A inne potęgi?

Odkrycie Dobińskiego

Dobiński badał szeregi postaci

$0^n/0! + 1^n/1! + 2^n/2! + 3^n/3! + 4^n/4! \ldots$

dla wszystkich naturalnych liczb n.

Zbieżność szeregów

Okazuje się, że szeregi te dla każdego n są zbieżne, co można łatwo sprawdzić choćby stosując kryterium d'Alemberta.

Zatem żeby nie wiadomo jak duże n wziąć, suma takiego nieskończonego szeregu jest zawsze skończona.

Znamy tę sumę dla n=0,1. Co dalej?

Wyniki obliczeń dla pierwszych siedmiu wartości n (15 wyrazów)

n=0: 2,71828182845899

n=1: 2,71828182845823

n=2: 5,43656365690499

n=3: 13,5914091420847

n=4: 40,774227423501

n=5: 141,350655025445

n=6: 551,811210301734

A co by było, gdyby te wyniki podzielić przez e?

n=0: 1,00000000016885

n=1: 1,00000000016857

n=2: 2,00000000033293

n=3: 5,00000000076691

n=4: 15,0000000001288

n=5: 51,9999999887595

n=6: 202,99999971222

...a po zaokrągleniu:

n=0:	1
n=1:	1
n=2:	2
n=3:	5
n=4:	15
n=5:	52
n=6:	203

Wzór Dobińskiego (1877)

Dzisiejsze sformułowanie:

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$$

Iloczynowy wzór Dobińskiego

Mało znany inny, tym razem iloczynowy, wzór Dobińskiego (1876)

$$\left|\prod_{k=0}^{\infty}\left[\tan\left(2^k x\right)\right]^{1/\left(2^k\right)}\right| = 4\sin^2 x$$

Fragment oryginalnej pracy Dobińskiego

Summirung der Reihe $\Sigma \frac{n^m}{n!}$ für $m = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$

1) Bezeichnet man die Summe der Reihe für $m = 1$ mit $\sum\limits_1^\infty \frac{n}{n!}$, so hat man:

$$\sum_1^\infty \frac{n}{n!} = 1 + \frac{2}{2!} + \frac{3}{3!} + \frac{4}{4!} + \ldots = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots = e$$

also die bekannte Formel.

2) Weil

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \cdots$$

$$e = \quad 1 + \frac{2}{1.2} + \frac{3}{1.2.3} + \frac{4}{1.2.3.4} + \ldots$$

so erhält man durch Addition:

$$2e = 1 + 2 + \frac{3}{1.2} + \frac{4}{1.2.3} + \frac{5}{1.2.3.4} + \cdots$$

Daher gilt die Gleichung:

$$\sum_1^\infty \frac{n^2}{n!} = 1 + \frac{2^2}{2!} + \frac{3^2}{3!} + \frac{4^2}{4!} + \ldots = 2e$$

Podziękowania

należą się mojemu synowi, Antoniemu, za świetne rysunki piratów.

<Mistrzostwa w Algorytmice i Programowaniu>

Projekt „Mistrzostwa w Algorytmice i Programowaniu – Uczniowie” jest finansowany ze środków pochodzących z „Programu Rozwoju Talentów Informatycznych na lata 2019-2029”

Dofinansowanie Projektu: 4.887.850,50 zł

Całkowita wartość Projektu: 5.460.850,50 zł

GOV.pl CYFRYZACJA

KPRM