
MP
<Mistrzostwa
w Algorytmice
i Programowaniu>
MATEMATYKA W KONKURSACH
ALGORYTMICZNO-PROGRAMISTYCZNYCH
OTWARTY WEB-KURS
Webinarium przeprowadzone
w ramach projektu
"Mistrzostwa w Algorytmice
i Programowaniu - Uczniowie",
finansowanego przez:
GOV.pl
CYFRYZACJA
KPRM

Piotr Chrząstowski-Wachtel
Uniwersytet Warszawski

Kombinatoryka

Zbiory skończone

- Przez wiele lat kombinatoryka nie cieszyła się zbyt wielkim poważaniem wśród matematyków.
- Informatyka zmieniła to podejście całkowicie
- Okazało się, że do analizy algorytmów są potrzebne zaawansowane metody matematyczne, a problemy stawiane przez kombinatorykę należą do najtrudniejszych (liczby Ramseya).

Typowe zadanie kombinatoryczne

- Ile elementów liczy dany skończony zbiór?
- Początki kombinatoryki: Blaise Pascal i jego “Traité du triangle arithmétique (1655)”.
- Pascal analizuje “swój” trójkąt i dowodzi kilkanaście jego własności, w tym najważniejszą: na przecięciu n-tego wiersza i k-tej koluny znajduje się C(n,k) – liczba wyborów k-elementowego podzbioru ze zbioru n-elementowego.

Programiści lubią kombinatorykę

- Studenci matematyki często nie lubią kombinatoryki; zresztą często jej nie mają w curriculum studiów matematycznych.
- Studenci informatyki na odwrót.
- Czemu?

Zliczanie elementów zbioru

- Są dwa problemy przy zliczaniu elementów zbioru:
  - żeby zauważyć każdy przypadek
  - żeby żadnego nie policzyć dwa razy
- To jest bardzo typowa sytuacja przy programowaniu: często musimy obsłużyć pewną skończoną liczbę sytuacji. Chodzi o to, żeby
  - nie przegapić żadnej możliwości
  - dwa razy nie nie obsłużyć jednej sytuacji

Definicje

Arystoteles, ustalając naukowe standardy na wieki, podał następującą regułę dotyczącą definiowania:

Definicja powinna się składać z pojęć definiowanych (definiendum) i zdefiniowanych (definiens). Te pierwsze definiujemy za pomocą tych drugich. Te drugie, to aksjomaty, które przyjmujemy jako dane oraz już zdefiniowane wcześniej pojęcia.

Definiendum i definiens powinny być rozłączne – nie można nowych pojęć definiować za pomocą pojęć jeszcze nie zdefiniowanych.

Rekurencja

Rekurencja jest metodą definiowania z pozoru łamiącą tę zasadę.

Rekurencyjnie definiujemy obiekty odwołując się do aksjomatu indukcji.

Definicje rekurencyjne

Silnia

$0! = 1$
$n! = n(n-1)!$ dla $n>0$

zamiast
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

Ciąg arytmetyczny

$x_1 = a$

$x_n = x_{n-1} + d$

zamiast

$x_n = a + (n-1)d$

Ciąg geometryczny

$x_1 = a$

$x_n = x_{n-1} \cdot q$

zamiast

$x_n = a \cdot q^{n-1}$

Dodawanie, gdy umiemy tylko dodawać jedynkę

$$x+y = \begin{cases} \text{albo} \quad x & \text{dla } y=0 \\ \text{albo} \quad (x+(y-1))+1 & \text{dla } y>0, \end{cases}$$

gdzie z kolei $y-1 = z$ takie, że $(z+1)=y$.

Mnożenie

$$x \cdot y = \begin{cases} \text{albo} \quad 0 & \text{dla } y=0 \\ \text{albo} \quad x+(x\cdot(y-1)) & \text{dla } y>0, \end{cases}$$

Potęgowanie

$$x^y = \begin{cases} \text{albo} \quad 1 \text{ dla } y=0 \\ \text{albo} \quad x \cdot (x^{(y-1)}) \quad \text{dla } y>0, \end{cases}$$

Hiperpotęgowanie

$$x\uparrow y = \begin{cases} \text{albo} \quad 1 \quad \text{dla } y=0 \\ \text{albo} \quad x^{(x\uparrow(y-1))} \quad \text{dla } y>0, \end{cases}$$

Hiper-hiper-potęgowanie

$$x \Uparrow y = \begin{cases} \text{albo} \quad 1 \quad \text{dla } y=0 \\ \text{albo} \quad x \uparrow (x \Uparrow (y-1)) \quad \text{dla } y>0, \end{cases}$$

Trójkąt Pascala

$p(n,0) = 1$ dla każdego $n \geq 0$

$p(0,k) = 0$ dla każdego $k > 0$

$p(n,k) = p(n-1,k-1) + p(n-1,k)$ dla każdych $n,k>0$

k

n

	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0
4	1	4	6	4	1	0
5	1	5	10	10	5	1

…………………………………………

Wzór Pascala (Newtona)

Własność trójkąta Pascala

$$p(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Zadanie z matury 2018

- Liczby 1,2,3,4,5,6,7,9 ustawiono losowo w ciąg. Jakie jest prawdopodobieństwo, że żadne dwie liczby parzyste nie wystąpią obok siebie?
- Zadanie sprowadza się do wyznaczenia liczby ciągów złożonych z 5 jedynek i 3 zer (nieparzyste-parzyste) takich, że żadne dwa zera nie sąsiadują.
- Otrzymany wynik pomnożymy przez 5!3! i podzielimy przez 8! wyznaczając szukane prawdopodobieństwo.

Podejście rekurencyjne

- Załóżmy, że mamy j jedynek i z zer. Niech f(j,z) będzie liczbą ciągów z nich złożonych bez sąsiadujących zer.
- Co wiadomo od razu?
- $f(j,0) = 1 = f(0,1)$
- $f(0,z) = 0$ dla $z>1$
- $f(j,z) = f(j-1,z-1) + f(j-1,z)$

pierwsze jest zero pierwsza jest jedynka

Podejście rekurencyjne

- Załóżmy, że mamy j jedynek i z zer. Niech $f(j,z)$ będzie liczbą ciągów z nich złożonych bez sąsiadujących zer.
- Co wiadomo od razu?
- $f(j,0) = 1 = f(0,1)$
- $f(0,z) = 0$ dla $z>1$,
- $f(j,z) = f(j-1,z-1) + f(j-1,z)$

pierwsze jest zero

pierwsza jest jedynka

czyli $f(j,z) = p(j+1,z)$

Tabela dla f(j,z)

- Przekątne są wierszami trójkąta Pascala

	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	o	0	0	0
3	1	3	1	0	0	0
4	1	4	3	0	0	0
5	1	5	6	1	0	0
6	1	6	10	4	0	0
7	1	7	15	10	1	0
8	1	8	21	20	5	0

Tabela dla f(j,z)

- Sumy wierszy, to kolejne liczby Fibonacciego!

	0	1	2	3	4	5	S
0	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	2
2	1	2	o	0	0	0	3
3	1	3	1	0	0	0	5
4	1	4	3	0	0	0	8
5	1	5	6	1	0	0	13
6	1	6	10	4	0	0	21
7	1	7	15	10	1	0	34
8	1	8	21	20	5	0	55

Liczby Fibonacciego

- $F_0 = 0$
- $F_1 = 1$
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n>1$

0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377 610...

Nieporządki

Nieporządkiem nazwiemy każdą permutację, w której żaden element nie zachowuje swojej pozycji

Pytanie: ile jest nieporządków n-elemento-wych?

Jak wyznaczyć liczbę nieporządków?

Niech D_n będzie liczbą n-elementowych nieporządków.

$D_1 = 0$, $D_2=1$. Co dalej?

Podzielmy nieporządki n-elementowe na dwie klasy:

- do pierwszej zaliczymy te, w których liczba n i jeszcze jakaś inna liczba j zamieniły się miejscami. Liczbę j można wybrać na (n-1) sposobów. Takich nieporządków jest zatem $(n-1)D_{n-2}$.

Nieporządki – zliczanie

Do drugiej klasy należą te nieporządki, w których liczba n nie zamieniła się z żadną inną miejscami. Na ostatnim miejscu może stać dowolna liczba $i<n$. Ponieważ n nie może stać na pozycji i-tej (bo się nie zamieniło miejscami), więc faktycznie n pełni rolę liczby i, zatem pozostałe elementy można ustawić na D_{n-1} sposobów. To nam daje $(n-1)D_{n-1}$ ustawień.

Ostatecznie $D_n = (n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})$ dla $n>2$.

Jak rozwiązać to równanie?

Mamy co prawda metodę wyznaczenia D_n dla dowolnego n, lecz jest to metoda żmudna, wymagająca obliczenia wszystkich poprzednich wartości D_k dla $k<n$.

Pora na czary.

Rozwiązywanie równań rekurencyjnych

$D_n = (n-1)(D_{n-1}+D_{n-2})$ przy czym $D_1=0$, $D_2=1$.

Podstawmy $B_j = D_j / j!$ dla wszystkich $j=1,2,\ldots,n$.

Wtedy $nB_n=(n-1)B_{n-1}+B_{n-2}$

lub równoważnie $n(B_n-B_{n-1}) = -(B_{n-1}-B_{n-2})$

Niech teraz $C_n = B_n-B_{n-1}$

wtedy $nC_n = -C_{n-1}$ z warunkiem początkowym

$$C_2=B_2-B_1=½D_2-D_1 = ½$$

Ostatecznie $C_n=(-1)^n / n!$

Wracamy do D_n

$C_n=(-1)^n / n!$

$C_n = B_n - B_{n-1}$

$B_j = D_j / j!$

Zatem $B_n = C_n + B_{n-1} =$

$(-1)^0/0!+(-1)^1/1!+ \ldots + (-1)^n/n!$

i w końcu $D_n=n!((-1)^0/0!+(-1)^1/1!+ \ldots + (-1)^n/n!)$

$= n! (1-1/2!+1/3!-1/4!+\ldots + (-1)^n/n!)$

Na marginesie

Wartość w nawiasie

$(1-1/2!+1/3!-1/4!+... + (-1)^n/n!)$

jest bardzo bliska wartości $e^{-1} \approx 0{,}367879441$, więc takie będzie też graniczne prawdopodobieństwo tego, że losowa n-elementowa permutacja okaże się nieporządkiem (przy n dążącym do nieskończoności).

<Mistrzostwa
w Algorytmice
i Programowaniu>

Projekt „Mistrzostwa w Algorytmice i Programowaniu – Uczniowie” jest finansowany ze środków pochodzących z „Programu Rozwoju Talentów Informatycznych na lata 2019-2029”

Dofinansowanie Projektu: 4.887.850,50 zł

Całkowita wartość Projektu: 5.460.850,50 zł

GOV.pl
CYFRYZACJA

KPRM

Publikacja multimedialna wyraża jedynie poglądy autorów i nie może być utożsamiana z oficjalnym stanowiskiem Kancelarii Prezesa Rady Ministrów