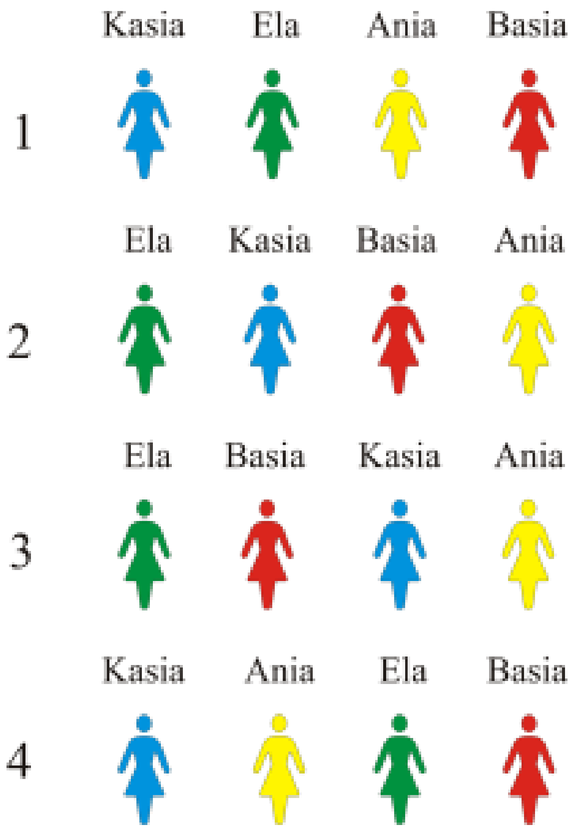
Podstawowe pojęcia kombinatoryczne

Permutacje zbioru

Weźmy dowolny zbiór skończony. Na przykład zbiór osób {Ania, Basia, Ela, Kasia}. Osoby te można rozmaicie poustawiać w kolejkę. Oto kilka przykładów takiego ustawiania.



Nie są to oczywiście wszystkie możliwości. Każde z tych ustawień nazwiemy **permutacją.**

Mówiąc ściśle, permutacją zbioru n-elementowego nazywamy każdy ciąg n-elementowy o różnych wyrazach należących do tego zbioru.

Bierzemy więc **wszystkie** elementy jakiegoś zbioru i ustawiamy je w różny sposób w ciągi. Każde takie ustawienie to permutacja.
Ile jest wszystkich permutacji, jeśli przestawiamy n elementów? Oznaczmy liczbę wszystkich permutacji zbioru n-elementowego przez P_n. Wtedy

$$P_n = n!$$

Co to jest symbol $n!$? Czyta się to n silnia. A określenie jest takie: silnia liczby naturalnej n jest to po prostu iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do właśnie n. Definicję tę uzupełniamy o umowę ile wynosi zero silnia. Umawiamy się, że zero silnia to 1.

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \dots \ \cdot (n-1) \cdot n$

$0! = 1$

Ważną własnością silni jest:

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

Zauważmy, że silnia jest funkcją bardzo szybko rosnącą. Znaczy to, ze wraz ze wzrostem liczebności zbioru bardzo szybko rośnie liczba ustawień jego elementów. Popatrzmy na tabelkę.

n	$n!$
2	2
3	6
4	24
5	120
10	3628800
20	2432902008176640000

Kombinacje k-elementowe ze zbioru n elementów?

Najprzód powiedzmy sobie co to są te kombinacje. Załóżmy, że mamy grupę osób. Na przykład 10. Chcemy z nich wybrać delegację, powiedzmy, trzyosobową. Wyborów takich jest dużo. W odróżnieniu od permutacji, bierzemy tylko część elementów zbioru i nie ustawiamy ich w ciąg. Jest to więc wybór pewnego **podzbioru** z danego zbioru. Każdy taki podzbiór wybrany ze zbioru nazywamy **kombinacją**. Zatem

Kombinacja k-elementowa ze zbioru n-elementowego to podzbiór k elementów $(k \leq n)$ wybranych ze zbioru n elementów.

Ile jest wszystkich kombinacji? Jeśli spośród n elementów wybieramy k, to liczbę kombinacji będziemy oznaczać przez C_n^k.

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

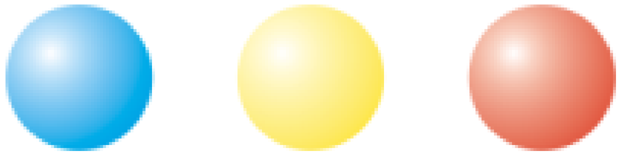
Symbol $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ zwany jest symbolem Newtona.

Przykład

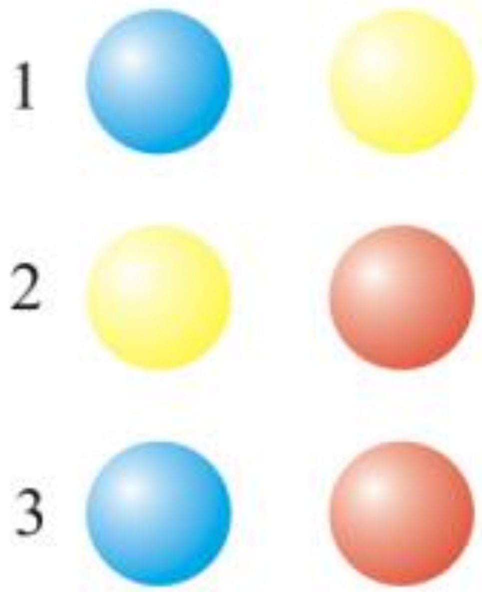
Ile jest dwuelementowych podzbiorów ze zbioru trzyelementowego? Najpierw zróbmy to na obrazku, a potem zastosujmy wzór. Zobaczymy czy się zgadza.

To oczywiście nie jest żaden dowód.

Oto cały zbiór



A oto jego wszystkie dwuelementowe podzbiory.



Jak widać jest ich 3. Teraz to obliczmy.

$$C_3^2 = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} = \frac{6}{2 \cdot 1} = 3$$

Wariacje bez powtórzeń.

Znów załóżmy, że mamy grupę osób. Wybieramy z nich delegację, powiedzmy, trzyosobową. Ale tym razem pierwsza osoba będzie przewodniczącym delegacji, druga zastępcą przewodniczącego, a trzecia zwykłym członkiem. Mamy więc pewną kolejność, hierarchię wśród wybranych osób.
Albo inaczej. Mamy 10 cyfr. Wybieramy z nich cztery i ustawiamy w jakiejś kolejności. Otrzymujemy czterocyfrowe liczby o nie powtarzających się cyfrach. Oczywiście $2356 \neq 3526$, mimo, że zestaw cyfr w obu liczbach jest identyczny.

Tu też kolejność ustawienia jest istotna.
Mówiąc bardziej abstrakcyjnie, ze zbioru n –elementowego wybieramy k -elementowe **ciągi**. Takie ciągi to **wariacje bez powtórzeń** (bo elementy w ciągu się nie powtarzają).

Wariacja k -elementowa **bez powtórzeń** ze zbioru n -elementowego, to ciąg k -elementowy o różnych wyrazach wybranych spośród tych n elementów. Oczywiście $k \leq n$. Jeśli $k = n$, to mamy permutacje, o ustawiamy w ciąg wszystkie elementy zbioru.

Wariacje od kombinacji odróżnia to, że w kombinacjach kolejność ustawienia elementów jest nieistotna, bo to podzbiory, natomiast wariacje są ciągami, a ciągi o tych samych elementach ale różnej ich kolejności to różne ciągi. Wariacji jest więc więcej niż kombinacji z tego samego zbioru i takiej samej liczbie elementów. Dokładniej: jest ich tyle co kombinacji razy liczba sposobów, na które można uporządkować k elementów. Liczbę wariacji bez powtórzeń oznaczać będziemy przez V_n^k.

$$V_n^k = C_n^k \cdot k! = \binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Przykład

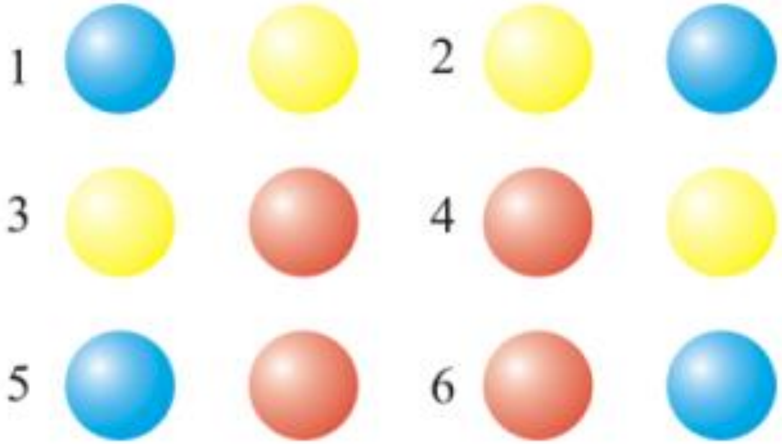
Ile jest dwuelementowych ciągów ze zbioru trzyelementowego? Najpierw zróbmy to na obrazku, a potem zastosujmy wzór.

Przykład

Ile jest dwuelementowych ciągów ze zbioru trzyelementowego? Najpierw zróbmy to na obrazku, a potem zastosujmy wzór.

Oto cały zbiór

A to są wszystkie wariacje dwuelementowe z tego zbioru.



$$V_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6$$

Wariacje z powtórzeniami.

Mamy do dyspozycji 10 cyfr. Możemy te cyfry wybierać i tworzyć liczby. Na przykład czterocyfrowe. W poprzednim punkcie były to liczby o różnych cyfrach. Ale nie musi tak być; cyfry mogą się powtarzać.
Może być taka: 1359, ale taka też: 1339 i taka: 1111. Jasne, że takich liczb jest więcej niż liczb w których cyfry **nie mogą** się powtarzać. Takie ciągi, w których wyrazy mogą (ale nie muszą) się powtarzać nazywamy **wariacjami z powtórzeniami**.

Wariacjami k -elementowymi z powtórzeniami ze zbioru {n -elementowego nazywamy ciągi k -elementowe o wyrazach niekoniecznie różnych wybranych ze zbioru n elementów. Tym razem nie musi być $k \le n$.

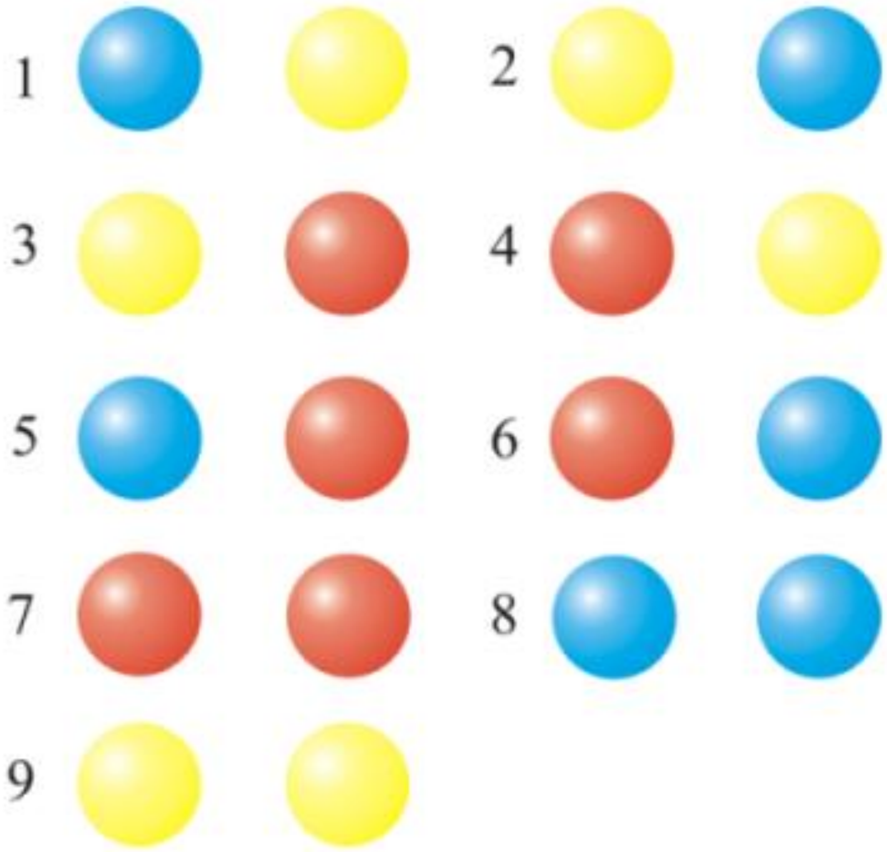
Ile jest tych wariacji? Oznaczmy liczbę takich wariacji przez W_n^k.

$$W_n^k = n^k$$

Przykład

Oto cały zbiór

A to są wszystkie wariacje dwuelementowe z powtórzeniami z tego zbioru.



$$W_3^2 = 3^2 = 9.$$

Wszystkie podzbiory zbioru n-elementowego?

Wiemy jak policzyć liczbę podzbiorów o ustalonej liczbie elementów. Mamy przecież wzór na liczbę kombinacji.
Tu jednak chodzi o liczbę **wszystkich** podzbiorów. W to wchodzi również sam zbiór (każdy zbiór jest własnym podzbiorem, chyba, że mówimy o podzbiorach właściwych) oraz zbiór pusty, który zawiera się w każdym zbiorze.
Musimy więc zsumować liczby podzbiorów 0-elementowych, jednoelementowych, dwuelementowych itd. aż do podzbioru n-elementowego. Musimy więc dodać liczby:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ \dots\ \binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}.$$

To właściwie jest już poszukiwany przepis na obliczenie liczby wszystkich podzbiorów, ale czy nie dałoby się zapisać tego prościej? Przypomnijmy sobie dwumian Newtona.

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+\ \dots\ \binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

Widzimy, że współczynniki po prawej stronie są identyczne z naszym wzorem.
Co zrobić, by została tylko ich suma? Tak będzie, jeśli $a=b=1$. Podstawmy.

$$\binom{n}{0}1^n+\binom{n}{1}1^{n-1}\cdot 1+\binom{n}{2}1^{n-2}\cdot 1^2+\binom{n}{3}1^{n-3}\cdot 1^3+\ \dots\ +\binom{n}{n-1}1\cdot 1^{n-1}+\binom{n}{n}1^n=(1+1)^n$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ \dots\ +\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$$

A, to już wiemy!

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ \dots\ +\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$$

Liczba wszystkich podzbiorów zbioru n-elementowego wynosi 2^n.